反射テスト　２次関数　全称記号と存在記号　02

1. $f(x) = x^2 - 2x + a$, $g(x) = -x^2$ とする. 次の条件を満たす a の値の範囲を求めよ.

（ S 級 1 分 10 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

(1)　$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) > g(x)$

(2)　$\exists\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) < g(x)$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. $f(x) = x^2 - ax + a$, $g(x) = -x^2$ とする. 次の条件を満たす a の値の範囲を求めよ.

（ S 級 1 分 10 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

(1) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) > g(x)$

(2) $\exists\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) < g(x)$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

反射テスト　２次関数　全称記号と存在記号　02　解答解説

1.　$f(x)=x^2-2x+a$, $g(x)=-x^2$ とする. 次の条件を満たす a の値の範囲を求めよ.

（ S 級 1 分 10 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

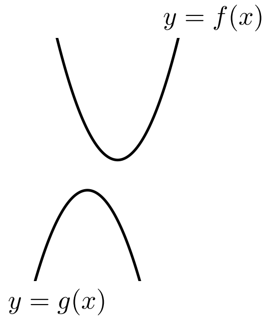
★ 全称記号∀と存在記号∃

あらゆる x に対して $f(x)=0$　⇔　∀ x に対して $f(x)=0$　←★恒等式

$f(x)=0$ を満たす x が存在する.　⇔　∃ x に対して $f(x)=0$　←★方程式

☆方程式を解いて x はあらゆる数になるときがある. その場合は恒等式とも言える. 恒等式は方程式を包含すると言える.

(1)　$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x)>g(x)$　⇔　あらゆる実数 x に対して, $f(x)>g(x)$



$f(x)-g(x)=x^2-2x+a-(-x^2)=2x^2-2x+a$

∴ あらゆる実数 x に対して, $2x^2-2x+a>0$ が成立する条件を考える.

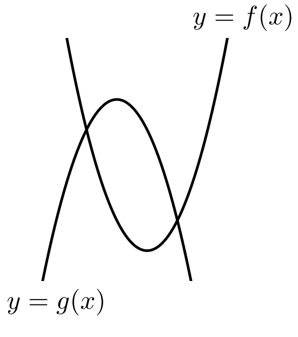
$y=2x^2-2x+a$ は下に凸の 2 次関数であるから,
$2x^2-2x+a=0$ の判別式が負になればよい.

$\mathrm{D}/4=(-1)^2-2a=1-2a$

$\therefore\quad 1-2a<0 \quad ⇔ \quad \boldsymbol{\frac{1}{2}<a}$

☆別解　上の図をイメージする.
$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が上図のように共有点を持たなければよいので,
$f(x)=g(x)$　⇔　$2x^2-2x+a=0$　これが実数解をもたない.
以下は上と同様に, 判別式 <0 を解く.

(2)　$\exists\, x \in \mathbb{R}$, $f(x)<g(x)$　⇔　$f(x)<g(x)$ を満たす実数 x が存在する



$f(x)-g(x)=x^2-2x+a-(-x^2)=2x^2-2x+a$

∴ ある実数 x に対して, $2x^2-2x+a<0$ が成立する条件を考える.

$y=2x^2-2x+a$ の頂点の座標は　$y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+a-\frac{1}{4}$ より, 頂点 $\left(\frac{1}{2}, a-\frac{1}{2}\right)$

どこかで $y<0$ が成立するためには, 頂点の y 座標が負であればよい.

$a-\frac{1}{2}<0 \quad ⇔ \quad \boldsymbol{a<\frac{1}{2}}$

☆別解　上の図をイメージする.
$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が上図のようにどこかで共有点を持てばよい. 重解のときは不等式を満たす x がないので除く.
$f(x)=g(x)$　⇔　$2x^2-2x+a=0$　これが実数解を 2 つもつ.
$\therefore\quad \mathrm{D}/4=(-1)^2-2a>0 \quad ⇔ \quad a<\frac{1}{2}$

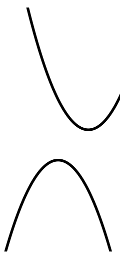
ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. $f(x)=x^2-ax+a$, $g(x)=-x^2$ とする. 次の条件を満たす a の値の範囲を求めよ.

（ S 級 1 分 10 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

(1) $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $f(x)>g(x)$ $\Leftrightarrow$ あらゆる実数 x に対して, $f(x)>g(x)$

$y=f(x)$



$y=g(x)$

$f(x)-g(x)=x^2-ax+a-(-x^2)=2x^2-ax+a$

$\therefore$ あらゆる実数 x に対して, $2x^2-ax+a>0$ が成立する条件を考える.

$y=2x^2-ax+a$ は下に凸の 2 次関数であるから,
$2x^2-ax+a=0$ の判別式が負になればよい.

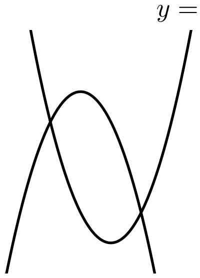
$\mathrm{D}=(-a)^2-4\cdot 2a=a(a-8)$

$\therefore\quad a(a-8)<0 \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{0<a<8}$

☆別解　上の図をイメージする.
$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が上図のように共有点を持たなければよいので,
$f(x)=g(x)$ $\Leftrightarrow$ $2x^2-ax+a=0$ これが実数解をもたなければよい. (以下は同様)

(2) $\exists\, x\in\mathbb{R}$, $f(x)<g(x)$ $\Leftrightarrow$ $f(x)<g(x)$ を満たす実数 x が存在する

$y=f(x)$



$y=g(x)$

$f(x)-g(x)=x^2-ax+a-(-x^2)=2x^2-ax+a$

$\therefore$ ある実数 x に対して, $2x^2-ax+a<0$ が成立する条件を考える.

$y=2x^2-ax+a$ の頂点の座標は $y=2\left(x-\dfrac{a}{4}\right)^2+a-\dfrac{1}{8}a^2$ より, 頂点 $\left(\dfrac{a}{4}, a-\dfrac{1}{8}a^2\right)$

どこかで $y<0$ が成立するためには, 頂点の y 座標が負であればよい.

$a-\dfrac{1}{8}a^2<0 \quad\Leftrightarrow\quad$ $\boldsymbol{a<0}$ **又は** $\boldsymbol{8<a}$

☆別解　上の図をイメージする.
$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が上図のようにどこかで共有点を持てばよい. 重解のときは不等式を満たす x がないので除く.
$f(x)=g(x)$ $\Leftrightarrow$ $2x^2-ax+a=0$ これが実数解を 2 つもつ.
$\therefore\quad \mathrm{D}=(-a)^2-8a>0 \quad\Leftrightarrow\quad a<0$ 又は $8<a$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）