反射テスト　２次関数　全称記号と存在記号　01

1.　次の命題が成立するときの k の範囲を求めよ.（ S 級 1 分 10 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

(1)　$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 2x \geqq k$　　（「$\forall\, x \in \mathbb{R}$」とは「あらゆる実数 x」を表す. ）

(2)　$1 \leqq \exists\, x \leqq 2$, $x^2 - 2kx \leqq 0$
（「$1 \leqq \exists\, x \leqq 2$ とは「1 以上 2 以下のある x」を表し, 範囲内に 1 つでもあればよい. ）

2. 次の命題が成立するときの k の範囲を求めよ.(S 級 1 分 20 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分)

(1) $\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ x^2 > k(x-1)$

(2) $0 \leqq\ \exists\ x \leqq 1\ ,\ x^2 + 2 < kx$

反射テスト　２次関数　全称記号と存在記号　01　解答解説

1.　次の命題が成立するときの k の範囲を求めよ.（ S 級 1 分 10 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

★ 全称記号∀と存在記号∃

あらゆる x に対して $f(x)=0$　⇔　$\forall\, x$ に対して $f(x)=0$　←★恒等式

$f(x)=0$ を満たす x が存在する.　⇔　$\exists\, x$ に対して $f(x)=0$　←★方程式

☆方程式を解いて x はあらゆる数になるときがある. その場合は恒等式とも言える. 恒等式は方程式を包含すると言える.

(1)　$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x^2-2x \geqq k$　（「$\forall\, x \in \mathbb{R}$」とは「あらゆる実数 x」を表す. ）

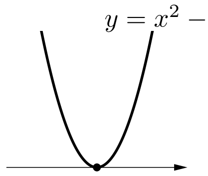
⇔ あらゆる x に対して, $x^2-2x-k \geqq 0$

⇔ $y=x^2-2x-k$ の最小値が 0 以上　（☆関数の最大最小で考える）

⇔ 2 次関数 $y=x^2-2x-k$ の判別式が 0 以下

⇔ $(-1)^2-1\times(-k) \leqq 0$

⇔ $\boldsymbol{k \leqq -1}$



☆確かめ　$k=-1$ のとき　$x^2-2x \geqq k$

⇒ $x^2-2x \geqq -1$　⇔　$(x-1)^2 \geqq 0$

これはあらゆる x に対して成立（左図）

☆別解

$y=x^2-2x$ と $y=k$ をグラフに描いて, 大小関係を比較してもよい.

(2)　$1 \leqq \exists\, x \leqq 2$, $x^2-2kx \leqq 0$

（「$1 \leqq \exists\, x \leqq 2$ とは「1 以上 2 以下のある x」を表し, 範囲内に 1 つでもあればよい. ）

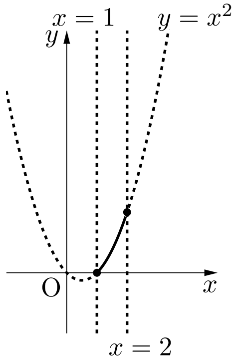
⇔ $1 \leqq x \leqq 2$ に対して, $y=x^2-2kx$ の最小値が 0 以下　（ 0 以下が 1 つでもあればよい. ）

$y=(x-k)^2-k^2$　⇔　頂点 $(k, -k^2)$ の 2 次関数

この 2 次関数を $y=f(x)$ とおくと, 定義域内の $f(x)$ の最小値は,

$$min.f(x)=\begin{cases} f(1)=1-2k & (\ k \leqq 1\ ) & \cdots\text{頂点が定義域の左にあるとき} \\ f(k)=-k^2 & (\ 1 \leqq k \leqq 2\ ) & \cdots\text{頂点が定義内にあるとき} \\ f(2)=4-4k & (\ 2 \leqq k) & \cdots\text{頂点が定義域の右にあるとき} \end{cases}$$

$$\text{題意} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} k \leqq 1 \text{ かつ } 1-2k \leqq 0 & \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \leqq k \leqq 1 \\ 1 \leqq k \leqq 2 \text{ かつ } -k^2 \leqq 0 & \Leftrightarrow & 1 \leqq k \leqq 2 \\ 2 \leqq k \text{ かつ } 4-4k \leqq 0 & \Leftrightarrow & 2 \leqq k \end{array}\right\} \Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{1}{2} \leqq k}$$



☆確かめ　$k=\frac{1}{2}$ のとき　$y=x^2-x=x(x-1)$

左図のように定義域内の最小値が $x=1$ のときの $y=0$ となる.

k がこれよりも大きくなると, x 切片の片方（大きい方）が右に行くが,

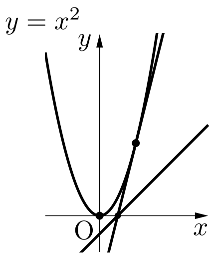
常に定義域内の最小値が負になることもわかる.

また, 関数 $y=x^2-2kx=x(x-2k)$ と考えれば, **原点を必ず通る左図のようなイメージを把握でき,** 上のように場合分けをせずとも解ける.

2. 次の命題が成立するときの k の範囲を求めよ.（ S 級 1 分 20 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

(1) $\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ x^2 > k(x-1)$

$\Leftrightarrow$ あらゆる x に対して, $x^2 - kx + k > 0$
$\Leftrightarrow$ $y = x^2 - kx + k$ の最小値が 0 より大 （☆関数の最大最小で考える）
$\Leftrightarrow$ 2 次関数 $y = x^2 - kx + k$ の判別式が 0 より小
$\Leftrightarrow$ $(-k)^2 - 4 \times 1 \times k < 0$
$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{0 < k < 4}$



☆別解
$y = x^2$ と $y = k(x-1)$ を左図のようにグラフに描いて, 大小関係を比較する.
k は点 $(1, 0)$ を通る直線の傾きである.

(2) $0 \leqq \exists\, x \leqq 1\ ,\ x^2 + 2 < kx$

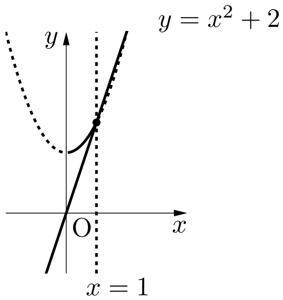
$\Leftrightarrow$ $0 \leqq x \leqq 1$ に対して, $y = x^2 - kx + 2$ の最小値が 0 より小

$$y = \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + 2 - \frac{k^2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 頂点 \left(\frac{k}{2}\ ,\ 2 - \frac{k^2}{4}\right) の 2 次関数$$

この 2 次関数を $y = f(x)$ とおくと, 定義域内の $f(x)$ の最小値は,

$$min.f(x) = \begin{cases} f(0) = 2 & (\ k \leqq 0\ ) \\ f\left(\frac{k}{2}\right) = 2 - \frac{k^2}{4} & (\ 0 \leqq k \leqq 1\ ) \\ f(1) = 3 - k & (\ 1 \leqq k) \end{cases}$$

$$題意 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} k \leqq 0 \ かつ\ 2 < 0 & \Leftrightarrow & 解なし \\ 0 \leqq k \leqq 1 \ かつ\ 2 - \frac{k^2}{4} < 0 & \Leftrightarrow & 解なし \\ 1 \leqq k \ かつ\ 3 - k < 0 & \Leftrightarrow & 3 < k \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{3 < k}$$



☆別解
関数 $y = x^2 + 2$ と $y = kx$ の大小比較をする.
$y = kx$ が定義域内で 2 次関数より大きい値をとればよい.