反射テスト　２次関数　最大最小の応用　場合分け　02

1.　次の 2 次関数の最大値・最小値を求めよ. { } 内は定義域とし, a は実定数とする.

（ S 級 3 分 40 秒, A 級 5 分, B 級 6 分 40 秒, C 級 9 分 ）

(1)　$y = x^2 - 4 \quad \{\, a \leqq x \leqq a + 3 \,\}$

(2)　$y = 4x - x^2 \quad \{\, a - 1 \leqq x \leqq a + 1 \,\}$

2. 次の 2 次関数の最大値・最小値を求めよ. { } 内は定義域とし, a は実定数とする.

(S 級 3 分 40 秒, A 級 5 分, B 級 6 分 40 秒, C 級 9 分)

(1) $y = x^2 - 4x \quad \{\, a \leqq x \leqq a+1 \,\}$

(2) $y = -x^2 - 6x \quad \{\, a-1 \leqq x \leqq a+1 \,\}$

反射テスト　２次関数　最大最小の応用　場合分け　02　解答解説

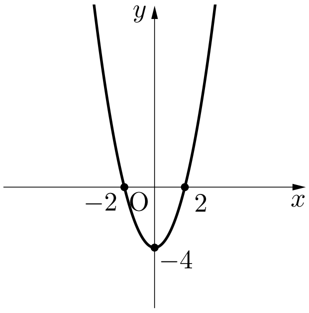
1.　次の 2 次関数の最大値・最小値を求めよ. { } 内は定義域とし, a は実定数とする.

（ S 級 3 分 40 秒, A 級 5 分, B 級 6 分 40 秒, C 級 9 分 ）

★ 2 次関数の最大最小

① 平方完成し, グラフを描く.　　② 頂点と定義域に注意して, 最大最小を求める.

(1)　$y = x^2 - 4 \quad \{\, a \leqq x \leqq a+3 \,\}$



頂点 $(0, -4)$ で下に凸（左図）. 以下, 与関数を $y = f(x)$ とする.

< 最小値 >

定義域は幅 3 で移動すると考えると, 定義域中に頂点が含まれるときは,

$a \leqq 0 \leqq a+3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leqq a \leqq 0$

このとき関数の最小値は　$f(0) = -4$

それ以外は, $\begin{cases} a \leqq -3 & \text{のとき　最小値は} \quad f(a+3) = a^2 + 6a + 5 \\ 0 \leqq a & \text{のとき　最小値は} \quad f(a) = a^2 - 4 \end{cases}$

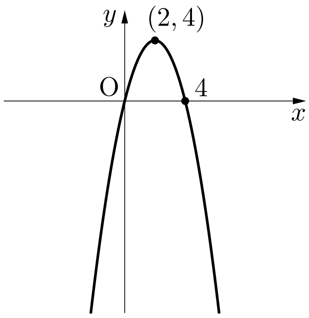
< 最大値 >

定義域の真ん中が頂点に一致するときは, $\frac{a+a+3}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{3}{2}$

よって, $\begin{cases} a \leqq -\frac{3}{2} & \text{のとき　最大値は} \quad f(a) = a^2 - 4 \\ -\frac{3}{2} \leqq a & \text{のとき　最大値は} \quad f(a+3) = a^2 + 6a + 5 \end{cases}$

$\therefore$ **答え** $\begin{cases} \boldsymbol{a \leqq -3} & \text{のとき　最大値 } f(a) = \boldsymbol{a^2 - 4} & \text{最小値 } f(a+3) = \boldsymbol{a^2 + 6a + 5} \\ \boldsymbol{-3 \leqq a \leqq -\frac{3}{2}} & \text{のとき　最大値 } f(a) = \boldsymbol{a^2 - 4} & \text{最小値 } f(0) = \boldsymbol{-4} \\ \boldsymbol{-\frac{3}{2} \leqq a \leqq 0} & \text{のとき　最大値 } f(a+3) = \boldsymbol{a^2 + 6a + 5} & \text{最小値 } f(0) = \boldsymbol{-4} \\ \boldsymbol{0 \leqq a} & \text{のとき　最大値 } f(a+3) = \boldsymbol{a^2 + 6a + 5} & \text{最小値 } f(a) = \boldsymbol{a^2 - 4} \end{cases}$

(2)　$y = 4x - x^2 \quad \{\, a-1 \leqq x \leqq a+1 \,\}$



$y = -x(x-4) = -(x-2)^2 + 4$

頂点 $(2, 4)$ で上に凸（左図）. 以下, 与関数を $y = f(x)$ とする.

< 最大値 >

定義域は幅 2 で移動すると考えると, 定義域中に頂点が含まれるときは,

$a-1 \leqq 2 \leqq a+1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leqq a \leqq 3$

このとき関数の最大値は　$f(2) = 4$

それ以外は, $\begin{cases} a \leqq 1 & \text{のとき　最大値は} \quad f(a+1) = -a^2 + 2a + 3 \\ 3 \leqq a & \text{のとき　最大値は} \quad f(a-1) = -a^2 + 6a - 5 \end{cases}$

< 最小値 >

定義域の真ん中が頂点に一致するときは, $\frac{a-1+a+1}{2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2$

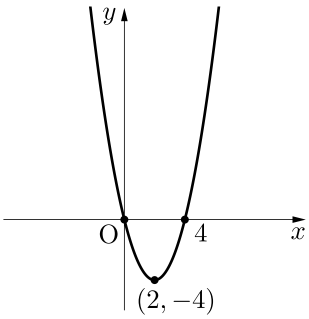
よって, $\begin{cases} a \leqq 2 & \text{のとき　最小値は} \quad f(a-1) = -a^2 + 6a - 5 \\ 2 \leqq a & \text{のとき　最小値は} \quad f(a+1) = -a^2 + 2a + 3 \end{cases}$

$\therefore$ **答え** $\begin{cases} \boldsymbol{a \leqq 1} & \text{のとき　最大値 } f(a+1) = \boldsymbol{-a^2 + 2a + 3} & \text{最小値 } f(a-1) = \boldsymbol{-a^2 + 6a - 5} \\ \boldsymbol{1 \leqq a \leqq 2} & \text{のとき　最大値 } f(2) = \boldsymbol{4} & \text{最小値 } f(a-1) = \boldsymbol{-a^2 + 6a - 5} \\ \boldsymbol{2 \leqq a \leqq 3} & \text{のとき　最大値 } f(2) = \boldsymbol{4} & \text{最小値 } f(a+1) = \boldsymbol{-a^2 + 2a + 3} \\ \boldsymbol{3 \leqq a} & \text{のとき　最大値 } f(a-1) = \boldsymbol{-a^2 + 6a - 5} & \text{最小値 } f(a+1) = \boldsymbol{-a^2 + 2a + 3} \end{cases}$

2. 次の 2 次関数の最大値・最小値を求めよ. { } 内は定義域とし, a は実定数とする.

(S 級 3 分 40 秒, A 級 5 分, B 級 6 分 40 秒, C 級 9 分)

(1) $y = x^2 - 4x \quad \{\, a \leqq x \leqq a+1 \,\}$



$y = x(x-4) = (x-2)^2 - 4$

頂点 $(2, -4)$ で下に凸（左図）. 以下, 与関数を $y = f(x)$ とする.

＜最小値＞

定義域は幅 1 で移動すると考えると, 定義域中に頂点が含まれるときは,

$a \leqq 2 \leqq a+1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leqq a \leqq 2$

このとき関数の最小値は　$f(2) = -4$

それ以外は, $\begin{cases} a \leqq 1 & \text{のとき　最小値は}\quad f(a+1) = a^2 - 2a - 3 \\ 2 \leqq a & \text{のとき　最小値は}\quad f(a) = a^2 - 4a \end{cases}$

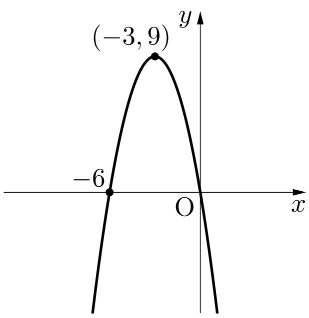
＜最大値＞

定義域の真ん中が頂点に一致するときは, $\frac{a+a+1}{2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{3}{2}$

よって, $\begin{cases} a \leqq \frac{3}{2} & \text{のとき　最大値は}\quad f(a) = a^2 - 4a \\ \frac{3}{2} \leqq a & \text{のとき　最大値は}\quad f(a+1) = a^2 - 2a - 3 \end{cases}$

$\therefore$ **答え** $\begin{cases} \boldsymbol{a \leqq 1} & \text{のとき　最大値}\ f(a) = \boldsymbol{a^2 - 4a} & \text{最小値}\ f(a+1) = \boldsymbol{a^2 - 2a - 3} \\ \boldsymbol{1 \leqq a \leqq \frac{3}{2}} & \text{のとき　最大値}\ f(a) = \boldsymbol{a^2 - 4a} & \text{最小値}\ f(2) = \boldsymbol{-4} \\ \boldsymbol{\frac{3}{2} \leqq a \leqq 2} & \text{のとき　最大値}\ f(a+1) = \boldsymbol{a^2 - 2a - 3} & \text{最小値}\ f(2) = \boldsymbol{-4} \\ \boldsymbol{2 \leqq a} & \text{のとき　最大値}\ f(a+1) = \boldsymbol{a^2 - 2a - 3} & \text{最小値}\ f(a) = \boldsymbol{a^2 - 4a} \end{cases}$

(2) $y = -x^2 - 6x \quad \{\, a-1 \leqq x \leqq a+1 \,\}$



$y = -x(x+6) = -(x+3)^2 + 9$

頂点 $(-3, 9)$ で上に凸（左図）. 以下, 与関数を $y = f(x)$ とする.

＜最大値＞

定義域は幅 2 で移動すると考えると, 定義域中に頂点が含まれるときは,

$a - 1 \leqq -3 \leqq a+1 \quad \Leftrightarrow \quad -4 \leqq a \leqq -2$

このとき関数の最大値は　$f(-3) = 9$

それ以外は, $\begin{cases} a \leqq -4 & \text{のとき　最大値は}\quad f(a+1) = -a^2 - 8a - 7 \\ -2 \leqq a & \text{のとき　最大値は}\quad f(a-1) = -a^2 - 4a + 5 \end{cases}$

＜最小値＞

定義域の真ん中が頂点に一致するときは, $\frac{a-1+a+1}{2} = -3 \quad \Leftrightarrow \quad a = -3$

よって, $\begin{cases} a \leqq -3 & \text{のとき　最小値は}\quad f(a-1) = -a^2 - 4a + 5 \\ -3 \leqq a & \text{のとき　最小値は}\quad f(a+1) = -a^2 - 8a - 7 \end{cases}$

$\therefore$ **答え** $\begin{cases} \boldsymbol{a \leqq -4} & \text{のとき　最大値}\ f(a+1) = \boldsymbol{-a^2 - 8a - 7} & \text{最小値}\ f(a-1) = \boldsymbol{-a^2 - 4a + 5} \\ \boldsymbol{-4 \leqq a \leqq -3} & \text{のとき　最大値}\ f(-3) = \boldsymbol{9} & \text{最小値}\ f(a-1) = \boldsymbol{-a^2 - 4a + 5} \\ \boldsymbol{-3 \leqq a \leqq -2} & \text{のとき　最大値}\ f(-3) = \boldsymbol{9} & \text{最小値}\ f(a+1) = \boldsymbol{-a^2 - 8a - 7} \\ \boldsymbol{-2 \leqq a} & \text{のとき　最大値}\ f(a-1) = \boldsymbol{-a^2 - 4a + 5} & \text{最小値}\ f(a+1) = \boldsymbol{-a^2 - 8a - 7} \end{cases}$