反射テスト　２次関数　最大最小の応用　場合分け　01

1.　次の 2 次関数の最大値・最小値を求めよ. { } 内は定義域とし, a は実定数とする.

（ S 級 2 分 50 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分 ）

(1)　$y = x^2 - 2ax \quad \{ -1 \leqq x \leqq 1 \}$

(2)　$y = x^2 - x \quad \{ a \leqq x \leqq a + 2 \}$

2. 次の 2 次関数の最大値・最小値を求めよ. { } 内は定義域とし, a は実定数とする.

（ S 級 3 分 20 秒, A 級 4 分 40 秒, B 級 7 分, C 級 9 分 30 秒 ）

(1) $y = x^2 - 2(a+1)x + a^2 \quad \{ -1 \leqq x \leqq 1 \}$

(2) $y = x^2 + x \quad \{ a \leqq x \leqq a+4 \}$

反射テスト　２次関数　最大最小の応用　場合分け　01　解答解説

1.　次の 2 次関数の最大値・最小値を求めよ. { } 内は定義域とし，a は実定数とする.

（ S 級 2 分 50 秒，A 級 4 分，B 級 6 分，C 級 8 分 ）

★ 2 次関数の最大最小

①　平方完成し，**グラフを描く**.　　②　頂点と定義域に注意して，最大最小を求める.

(1)　$y = x^2 - 2ax \quad \{ -1 \leqq x \leqq 1 \}$

$y = (x-a)^2 - a^2$

頂点 $(a, -a^2)$ で下に凸. 以下，与関数を $y = f(x)$ とする.

＜最小値＞

定義域中に頂点が含まれるときは，$-1 \leqq a \leqq 1$

このとき関数の最小値は　$f(a) = -a^2$

それ以外は，$\begin{cases} a \leqq -1 & \text{のとき　最小値は} \quad f(-1) = 1 + 2a \\ 1 \leqq a & \text{のとき　最小値は} \quad f(1) = 1 - 2a \end{cases}$

＜最大値＞

定義域の真ん中が頂点に一致するときは，$a = \frac{-1+1}{2} \iff a = 0$

よって，$\begin{cases} a \leqq 0 & \text{のとき　最大値は} \quad f(1) = 1 - 2a \\ 0 \leqq a & \text{のとき　最大値は} \quad f(-1) = 1 + 2a \end{cases}$

$\therefore$ **答え** $\begin{cases} \boldsymbol{a \leqq -1} & \text{のとき　最大値 } f(1) = \boldsymbol{1-2a} & \text{最小値 } f(-1) = \boldsymbol{1+2a} \\ \boldsymbol{-1 \leqq a \leqq 0} & \text{のとき　最大値 } f(1) = \boldsymbol{1-2a} & \text{最小値 } f(a) = \boldsymbol{-a^2} \\ \boldsymbol{0 \leqq a \leqq 1} & \text{のとき　最大値 } f(-1) = \boldsymbol{1+2a} & \text{最小値 } f(a) = \boldsymbol{-a^2} \\ \boldsymbol{1 \leqq a} & \text{のとき　最大値 } f(-1) = \boldsymbol{1+2a} & \text{最小値 } f(1) = \boldsymbol{1-2a} \end{cases}$

(2)　$y = x^2 - x \quad \{ a \leqq x \leqq a+2 \}$

$y = x(x-1) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

頂点 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ で下に凸. 以下，与関数を $y = f(x)$ とする.

＜最小値＞

定義域は幅 2 で移動すると考えると，定義域中に頂点が含まれるときは，

$a \leqq \frac{1}{2} \leqq a+2 \iff -\frac{3}{2} \leqq a \leqq \frac{1}{2}$

このとき関数の最小値は　$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

それ以外は，$\begin{cases} a \leqq -\frac{3}{2} & \text{のとき　最小値は} \quad f(a+2) = a^2 + 3a + 2 \\ \frac{1}{2} \leqq a & \text{のとき　最小値は} \quad f(a) = a^2 - a \end{cases}$

＜最大値＞

定義域の真ん中が頂点に一致するときは，$\frac{a+a+2}{2} = \frac{1}{2} \iff a = -\frac{1}{2}$

よって，$\begin{cases} a \leqq -\frac{1}{2} & \text{のとき　最大値は} \quad f(a) = a^2 - a \\ -\frac{1}{2} \leqq a & \text{のとき　最大値は} \quad f(a+2) = a^2 + 3a + 2 \end{cases}$

$\therefore$ **答え** $\begin{cases} \boldsymbol{a \leqq -\frac{3}{2}} & \text{のとき　最大値 } f(a) = \boldsymbol{a^2 - a} & \text{最小値 } f(a+2) = \boldsymbol{a^2+3a+2} \\ \boldsymbol{-\frac{3}{2} \leqq a \leqq -\frac{1}{2}} & \text{のとき　最大値 } f(a) = \boldsymbol{a^2 - a} & \text{最小値 } f\left(\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{-\frac{1}{4}} \\ \boldsymbol{-\frac{1}{2} \leqq a \leqq \frac{1}{2}} & \text{のとき　最大値 } f(a+2) = \boldsymbol{a^2+3a+2} & \text{最小値 } f\left(\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{-\frac{1}{4}} \\ \boldsymbol{\frac{1}{2} \leqq a} & \text{のとき　最大値 } f(a+2) = \boldsymbol{a^2+3a+2} & \text{最小値 } f(a) = \boldsymbol{a^2 - a} \end{cases}$

2. 次の 2 次関数の最大値・最小値を求めよ. { } 内は定義域とし, a は実定数とする.

(S 級 3 分 20 秒, A 級 4 分 40 秒, B 級 7 分, C 級 9 分 30 秒)

(1) $y = x^2 - 2(a+1)x + a^2 \quad \{ -1 \leqq x \leqq 1 \}$

$y = \{x - (a+1)\}^2 - 2a - 1$
頂点 $(a+1, -2a-1)$ で下に凸. 以下, 与関数を $y = f(x)$ とする.

＜最小値＞
定義域中に頂点が含まれるときは, $-1 \leqq a+1 \leqq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leqq a \leqq 0$
このとき関数の最小値は　$f(a+1) = -2a - 1$

それ以外は, $\begin{cases} a \leqq -2 \quad のとき \quad 最小値は \quad f(-1) = a^2 + 2a + 3 \\ 0 \leqq a \quad のとき \quad 最小値は \quad f(1) = a^2 - 2a - 1 \end{cases}$

＜最大値＞
定義域の真ん中が頂点に一致するときは, $a + 1 = \frac{-1+1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = -1$

よって, $\begin{cases} a \leqq -1 \quad のとき \quad 最大値は \quad f(1) = a^2 - 2a - 1 \\ -1 \leqq a \quad のとき \quad 最大値は \quad f(-1) = a^2 + 2a + 3 \end{cases}$

$$\therefore \textbf{答え} \begin{cases} \boldsymbol{a \leqq -2} & のとき \quad 最大値\ f(1) = \boldsymbol{a^2 - 2a - 1} & 最小値\ f(-1) = \boldsymbol{a^2 + 2a + 3} \\ \boldsymbol{-2 \leqq a \leqq -1} & のとき \quad 最大値\ f(1) = \boldsymbol{a^2 - 2a - 1} & 最小値\ f(a+1) = \boldsymbol{-2a - 1} \\ \boldsymbol{-1 \leqq a \leqq 0} & のとき \quad 最大値\ f(-1) = \boldsymbol{a^2 + 2a + 3} & 最小値\ f(a+1) = \boldsymbol{-2a - 1} \\ \boldsymbol{0 \leqq a} & のとき \quad 最大値\ f(-1) = \boldsymbol{a^2 + 2a + 3} & 最小値\ f(1) = \boldsymbol{a^2 - 2a - 1} \end{cases}$$

(2) $y = x^2 + x \quad \{ a \leqq x \leqq a+4 \}$

$y = x(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$
頂点 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ で下に凸. 以下, 与関数を $y = f(x)$ とする.

＜最小値＞
定義域は幅 4 で移動すると考えると, 定義域中に頂点が含まれるときは,
$a \leqq -\frac{1}{2} \leqq a + 4 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{9}{2} \leqq a \leqq -\frac{1}{2}$
このとき関数の最小値は　$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

それ以外は, $\begin{cases} a \leqq -\frac{9}{2} \quad のとき \quad 最小値は \quad f(a+4) = a^2 + 9a + 20 \\ -\frac{1}{2} \leqq a \quad のとき \quad 最小値は \quad f(a) = a^2 + a \end{cases}$

＜最大値＞
定義域の真ん中が頂点に一致するときは, $\frac{a+a+4}{2} = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{5}{2}$

よって, $\begin{cases} a \leqq -\frac{5}{2} \quad のとき \quad 最大値は \quad f(a) = a^2 + a \\ -\frac{5}{2} \leqq a \quad のとき \quad 最大値は \quad f(a+4) = a^2 + 9a + 20 \end{cases}$

$$\therefore \textbf{答え} \begin{cases} \boldsymbol{a \leqq -\frac{9}{2}} & のとき \quad 最大値\ f(a) = \boldsymbol{a^2 + a} & 最小値\ f(a+4) = \boldsymbol{a^2 + 9a + 20} \\ \boldsymbol{-\frac{9}{2} \leqq a \leqq -\frac{5}{2}} & のとき \quad 最大値\ f(a) = \boldsymbol{a^2 + a} & 最小値\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{-\frac{1}{4}} \\ \boldsymbol{-\frac{5}{2} \leqq a \leqq -\frac{1}{2}} & のとき \quad 最大値\ f(a+4) = \boldsymbol{a^2 + 9a + 20} & 最小値\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{-\frac{1}{4}} \\ \boldsymbol{-\frac{1}{2} \leqq a} & のとき \quad 最大値\ f(a+4) = \boldsymbol{a^2 + 9a + 20} & 最小値\ f(a) = \boldsymbol{a^2 + a} \end{cases}$$