反射テスト　2次関数　頂点の座標　01

1.　次の 2 次関数の頂点の座標を求めよ.（ S 級 1 分 20 秒, A 級 2 分, B 級 2 分 30 秒, C 級 3 分 ）

(1)　$y = x^2 - 6x$

(2)　$y = x^2 + 7x + 1$

(3)　$y = 3x^2 + 8x + 7$

(4)　$y = \dfrac{1}{4}x^2 - ax$

2. 次の 2 次関数の頂点の座標を求めよ.（ S 級 1 分 10 秒, A 級 2 分, B 級 2 分 30 秒, C 級 3 分 ）

(1) $y = x^2 + 10x$

(2) $y = x^2 - 9x + 25$

(3) $y = 5x^2 + 3x + 1$

(4) $y = \dfrac{1}{4}x^2 + 3ax + 9a^2$

反射テスト　2 次関数　頂点の座標　01　解答解説

1.　次の 2 次関数の頂点の座標を求めよ.（ S 級 1 分 20 秒, A 級 2 分, B 級 2 分 30 秒, C 級 3 分 ）

★ 2 次関数の頂点の座標

2 次関数を平方完成すればよい.

$$y = ax^2 + bx + c \quad \Leftrightarrow \quad y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$\Rightarrow$　2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の頂点 $\boldsymbol{\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)}$

☆公式を利用すれば解くのは早いが, 平方完成でできることが最重要である.

(1)　$y = x^2 - 6x$

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6x + 9 - 9 \quad \leftarrow (-6) \text{ の半分の二乗を加減} \\ &= x^2 - 6x + 9 - 9 \\ &= (x - 3)^2 - 9 \end{aligned}$$

頂点 $\boldsymbol{(3, -9)}$

☆ポイント

頂点の公式 $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ に代入して,

$$\left(-\frac{-6}{2 \times 1}, -\frac{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 0}{4 \times 1}\right) = (3, -9)$$

こちらでもできるのが理想である.

(2)　$y = x^2 + 7x + 1$

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 1 \\ &= \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{4}{4} \\ &= \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{45}{4} \end{aligned}$$

頂点 $\boldsymbol{\left(-\frac{7}{2}, -\frac{45}{4}\right)}$

(3)　$y = 3x^2 + 8x + 7$

$$\begin{aligned} y &= 3\left(x^2 + \frac{8}{3}x\right) + 7 \\ &= 3\left\{x^2 + \frac{8}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2\right\} + 7 \\ &= 3\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 - 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 7 \\ &= 3\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{3} + 7 \\ &= 3\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{5}{3} \end{aligned}$$

頂点 $\boldsymbol{\left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)}$

(4)　$y = \dfrac{1}{4}x^2 - ax$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{4}\left(x^2 - 4ax\right) \\ &= \frac{1}{4}\left\{x^2 - 4ax + (2a)^2 - (2a)^2\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left\{x^2 - 4ax + 4a^2\right\} - \frac{4a^2}{4} \\ &= \frac{1}{4}(x - 2a)^2 - a^2 \end{aligned}$$

頂点 $\boldsymbol{(2a, -a^2)}$

☆ポイント

頂点の公式 $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ を用いると,

$$\left(-\frac{-a}{2 \times \frac{1}{4}}, -\frac{(-a)^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times 0}{4 \times \frac{1}{4}}\right)$$

$$= \left(\frac{a}{\frac{1}{2}}, -\frac{a^2}{1}\right) = (2a, -a^2)$$

2. 次の 2 次関数の頂点の座標を求めよ.(S 級 1 分 10 秒, A 級 2 分, B 級 2 分 30 秒, C 級 3 分)

(1) $y = x^2 + 10x$

$$y = x^2 + 10x + 25 - 25 \quad \leftarrow (-10) \text{ の半分の二乗を加減}$$
$$= x^2 + 10x + 25 - 25$$
$$= (x+5)^2 - 25$$

頂点 $(-5, -25)$

(2) $y = x^2 - 9x + 25$

$$y = x^2 - 9x + \left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 25$$
$$= \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} + \frac{100}{4}$$
$$= \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{19}{4}$$

頂点 $\left(\frac{9}{2}, \frac{19}{4}\right)$

(3) $y = 5x^2 + 3x + 1$

$$y = 5\left(x^2 + \frac{3}{5}x\right) + 1$$
$$= 5\left\{x^2 + \frac{3}{5}x + \left(\frac{3}{10}\right)^2 - \left(\frac{3}{10}\right)^2\right\} + 1$$
$$= 5\left(x + \frac{3}{10}\right)^2 - 5 \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 + 1$$
$$= 5\left(x + \frac{3}{10}\right)^2 - \frac{9}{20} + \frac{20}{20}$$
$$= 5\left(x + \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{11}{20}$$

頂点 $\left(-\frac{3}{10}, \frac{11}{20}\right)$

(4) $y = \frac{1}{4}x^2 + 3ax + 9a^2$

$$y = \frac{1}{4}\left(x^2 + 12ax\right) + 9a^2$$
$$= \frac{1}{4}\left\{x^2 + 12ax + (6a)^2 - (6a)^2\right\} + 9a^2$$
$$= \frac{1}{4}\left\{x^2 + 12ax + 36a^2\right\} - \frac{36a^2}{4} + 9a^2$$
$$= \frac{1}{4}(x + 6a)^2$$

頂点 $(-6a, 0)$