反射テスト　2次関数　「はじき」の条件　応用　02

1.　次の問に答えよ.（ S 級 2 分 30 秒, A 級 4 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

(1)　$ax^2 - 2ax + 1 = 0$ の解 x がすべて正であるとき, a の値の範囲を求めよ.

(2)　x についての 2 次方程式 $x^2 - 2ax + 4 = 0$ が $x \geqq 1$ で解をもつとき a の値の範囲を求めよ.

2. 次の問に答えよ.（ S 級 3 分 30 秒, A 級 5 分, B 級 6 分, C 級 8 分 30 秒 ）

(1) $ax^2 - 2x + 1 = 0$ の解 x がすべて正であるとき, a の値の範囲を求めよ.

(2) x についての 2 次方程式 $x^2 - 2ax + 4 - 3a = 0$ が $x > 1$ で解をもつとき a の値の範囲を求めよ.

反射テスト　2次関数　「はじき」の条件　応用　02　解答解説

1.　次の問に答えよ.（S 級 2 分 30 秒, A 級 4 分, B 級 5 分, C 級 7 分）

(1)　$ax^2-2ax+1=0$ の解 x がすべて正であるとき, a の値の範囲を求めよ.

★「2 次方程式の実数解に **範囲の条件** がある」　⇒　**「はじき」の条件**

$a>0$ のとき, $\begin{cases} \text{①「は」判別式の条件　異なる 2 つの実数解} \Rightarrow D>0 \\ \text{②「じ」軸の条件} \Rightarrow \text{軸の } x \text{ 座標} >0 \\ \text{③「き」境界条件} \Rightarrow x=0 \text{ のとき左辺は正} \end{cases}$

☆注意
しかし, これは 2 次方程式のときの条件であり, 問題では $a=0$ のときは 2 次方程式ではない！
$a<0$ のときは, ③の境界条件だけ変わり, $x=0$ のとき左辺は負

$i)$　$a=0$ のとき,
　$0-0+1=0$　となり矛盾であるから, $a\neq 0$
$ii)$　$a>0$ のとき,
　① 実数解をもつ　⇔　$D/4\geqq 0$
　　⇔　$a^2-a\cdot 1\geqq 0$　⇔　$a(a-1)\geqq 0$　⇔　$a\leqq 0$　または　$1\leqq a$　⇒　$a>0$ より, $1\leqq a$
　② 軸条件　⇒　軸の x 座標が 0 より大　⇒　$1>0$　これは適当
　③ 境界条件　⇒　$x=0$ のとき, 左辺が 0 より大　⇒　$0-0+1=1>0$　これも適当
$iii)$　$a<0$ のとき,
　① 実数解をもつ　⇒　$ii)$ と同様で, $a\leqq 0$ または $1\leqq a$
　② 軸条件　⇒　$ii)$ と同様で, $1>0$ となり適当.
　③ 境界条件　⇒　$x=0$ のとき, 左辺が 0 より小　⇒　$0-0+1=1$　よって不適当　⇒　$a<0$ のときはダメ

$i),\ ii)\ iii)$ より, $a\neq 0$　かつ　$1\leqq a$　⇒　$\boldsymbol{1\leqq a}$　**…答え**

☆別解（こちらの方が早い）
　$a\neq 0$ より $ax^2-2ax+1=0 \Leftrightarrow x^2-2x+\frac{1}{a}=0$
　これの解が全て正 ⇔「 判別式 $D/4\geqq 0$ かつ 軸 $x=1>0$ かつ 境界 $0^2-2\cdot 0+\frac{1}{a}>0$ 」　⇔　$1\leqq a$

(2)　x についての 2 次方程式 $x^2-2ax+4=0$ が $x\geqq 1$ で解をもつとき a の値の範囲を求めよ.

☆余事象で考える
$x\geqq 1$ で解を 1 つでももてばいい.　⇔　全ての解が $x<1$ となることはない.
（余事象で考えない解法の場合は, 場合分けをしっかりする必要がある.）

★はじきの条件
①「は」判別式の条件　　実数解をもつ　⇔　$D\geqq 0$
∴　$D/4=(-a)^2-1\cdot 4=a^2-4$　⇒　$a^2-4\geqq 0$　⇔　$a\leqq -2$ 又は $2\leqq a$

②「じ」軸の条件　と　③「き」境界条件
　①の条件を満たすとき,
$x\geqq 1$ で解をもつ.　⇔　「解の全てが 1 より小さい」ことはない.
⇔　「軸が 1 より小さく, 境界切片が 0 より大」ではない.
軸の方程式 $x=a$, 境界切片 $1^2-2a\cdot 1+4=5-2a$ であるから,
「$a<1$ かつ $5-2a>0$」の否定　⇔　「$a<1$」の否定　⇔　$a\geqq 1$

①〜③ より　$\boldsymbol{2\leqq a}$　**…答え**

2.　次の問に答えよ.（ S 級 3 分 30 秒, A 級 5 分, B 級 6 分, C 級 8 分 30 秒 ）

(1)　$ax^2-2x+1=0$ の解 x がすべて正であるとき，a の値の範囲を求めよ.

★「2 次方程式の実数解に **範囲の条件** がある」　$\Rightarrow$　**「はじき」の条件**

$a>0$ のとき，
- **①「は」判別式の条件**　異なる 2 つの実数解　$\Rightarrow$　$D>0$
- **②「じ」軸の条件**　$\Rightarrow$　軸の x 座標 >0
- **③「き」境界条件**　$\Rightarrow$　$x=0$ のとき左辺は正

☆注意
しかし，これは 2 次方程式のとき，問題では $a=0$ のときは 2 次方程式ではない！
$a<0$ のときは，③の境界条件だけ変わり，$x=0$ のとき左辺は負

$i)$　$a=0$ のとき，
$-2x+1=0$　$\Leftrightarrow$　$x=\frac{1}{2}$　となり題意を満たす.

$ii)$　$a>0$ のとき，
①実数解をもつ　$\Leftrightarrow$　$D/4\geqq 0$
$\Leftrightarrow$　$1^2-a\geqq 0$　$\Leftrightarrow$　$1-a\geqq 0$　$\Leftrightarrow$　$a\leqq 1$　$\Rightarrow$　$a>0$ より，$0<a\leqq 1$
②軸条件　$\Rightarrow$　軸が 0 以上
$a\neq 0$ より，　$ax^2-2x+1=a\left(x-\frac{1}{a}\right)^2-\frac{1}{a}+1$　$\Rightarrow$　$\frac{1}{a}\geqq 0$
ここで，a の正負で場合分けすると，　$a>0$ であるから，　$1\geqq 0$　で適当　$\Rightarrow$　$a>0$
③境界条件　$\Rightarrow$　$x=0$ のとき，左辺が 0 より大　$\Rightarrow$　$0-0+1=1>0$　これは適当　$\Rightarrow$　a はあらゆる数

$iii)$　$a<0$ のとき，
① 実数解をもつ　$ii)$ と同様で　$a\leqq 1$
② 軸条件　$ii)$ と同様で　$\frac{1}{a}\geqq 0$　$\Rightarrow$　$a<0$ より $\frac{1}{a}<0$　これは不適当　$\Rightarrow$　$a<0$ はダメ
③ 境界条件　$ii)$ と同様で　左辺 $\leqq 1$　$\Rightarrow$　$x=0$ のとき左辺 $=1$ で不適当　$\Rightarrow$　$a<0$ はダメ

$i)$, $ii)$ $iii)$ より，$a=0$　または　$0<a\leqq 1$　$\Rightarrow$　$\boldsymbol{0\leqq a\leqq 1}$　**…答え**

☆別解（こちらの方が早い）
① $a=0$ は適当
② $a\neq 0$ のとき $ax^2-2x+1=0\Leftrightarrow x^2-\frac{2}{a}x+\frac{1}{a}=0$
これの解が全て正 $\Leftrightarrow$「 判別式 $D/4\geqq 0$ かつ 軸 $x=\frac{1}{a}>0$ かつ 境界 $0^2-\frac{2}{a}\cdot 0+\frac{1}{a}>0$ 」$\Leftrightarrow a\leqq 1$

$\therefore 0\leqq a\leqq 1$

(2)　x についての 2 次方程式 $x^2-2ax+4-3a=0$ が $x>1$ で解をもつとき a の値の範囲を求めよ.

★はじきの条件
①「は」判別式の条件　実数解をもつ　$\Leftrightarrow$　$D\geqq 0$
$\therefore$　$D/4=(-a)^2-1\cdot(4-3a)=a^2+3a-4$　$\Rightarrow$　$(a+4)(a-1)\geqq 0$　$\Leftrightarrow$　$a\leqq -4$ 又は $1\leqq a$

②「じ」軸の条件　と　③「き」境界条件
①の条件を満たすとき，　$x>1$ で解をもつ.　$\Leftrightarrow$　「解の全てが 1 以下である」ことはない.
$\Leftrightarrow$　「軸が 1 以下で，境界切片が 0 以上」ではない.
軸の方程式 $x=a$，境界切片 $1^2-2a\cdot 1+4-3a=5-5a$ であるから，
「$a\leqq 1$ かつ $5-5a\geqq 0$」の否定　$\Leftrightarrow$　「$a\leqq 1$」の否定　$\Leftrightarrow$　$1<a$

①〜③ より　$\boldsymbol{1<a}$　**…答え**