反射テスト　2次関数　「はじき」の条件　応用　01

1.　次の問に答えよ.（ S 級 3 分, A 級 4 分, B 級 5 分, C 級 6 分 ）

(1)　$2x^2-(a+1)x+a-1=0$ の 2 つの異なる実数解がともに 0 以上 1 以下であるとき, a の値の範囲を求めよ.

(2)　x についての 2 次方程式 $x^2-ax+a+1=0$ が正の解をもつとき a の値の範囲を求めよ.

2. 次の問に答えよ.（ S 級 3 分 30 秒, A 級 4 分 30 秒, B 級 6 分 30 秒, C 級 8 分 ）

(1) $2x^2+(2a-1)x+a+1=0$ を満たすどの実数解 x も $0<x<1$ を満たすとき, a の値の範囲を求めよ.

(2) x についての 2 次方程式 $x^2-2ax+a+1=0$ が正の解をもつとき a の値の範囲を求めよ.

反射テスト　２次関数　「はじき」の条件　応用　01　解答解説

1.　次の問に答えよ.（ S 級 3 分, A 級 4 分, B 級 5 分, C 級 6 分 ）

(1)　$2x^2-(a+1)x+a-1=0$ の 2 つの異なる実数解がともに 0 以上 1 以下であるとき, a の値の範囲を求めよ.

★「2 次方程式の実数解に **範囲の条件** がある」　⇒　**「はじき」の条件**

①「は」判別式の条件　2 つの異なる実数解をもつ.　⇔　$D>0$
②「じ」軸の条件　⇒　$0 \leqq$ 軸の x 座標 $\leqq 1$
③「き」境界条件　⇒　$x=0,1$ のとき左辺は 0 以上

①「は」判別式の条件
$D>0$　⇔　$\{-(a+1)\}^2-4\cdot 2\cdot(a-1)>0$　⇔　$a^2+2a+1-8a+8>0$　⇔　$(a-3)^2>0$　⇔　$a \neq 3$

②「じ」軸条件
左辺を 2 次関数と考えた場合, 軸の方程式は　$x=-\frac{-(a+1)}{2\cdot 2}=\frac{a+1}{4}$
$0 \leqq$ 軸の x 座標 $\leqq 1$　⇔　$0 \leqq \frac{a+1}{4} \leqq 1$　⇔　$-1 \leqq a \leqq 3$

③「き」境界条件
$x=0$ のとき, 左辺が 0 以上　⇔　$a-1 \geqq 0$　⇔　$1 \leqq a$
$x=1$ のとき, 左辺が 0 以上　⇔　$2-(a+1)+a-1=0 \geqq 0$　条件適当

①〜③ より, $\boldsymbol{1 \leqq a < 3}$　**…答え**

(2)　x についての 2 次方程式 $x^2-ax+a+1=0$ が正の解をもつとき a の値の範囲を求めよ.

☆余事象で考える
正の解を 1 つでももてばいい.　⇔　全ての解 x が 0 以下となることはない.
(余事象で考えない解法の場合は, 場合分けをしっかりする必要がある.）

★ はじきの条件
①「は」判別式の条件　実数解をもつ　⇔　$D \geqq 0$
$D \geqq 0$　⇔　$(-a)^2-4\cdot(a+1) \geqq 0$　⇔　$a^2-4a-4 \geqq 0$　⇔　$a \leqq 2-2\sqrt{2}$ 又は $2+2\sqrt{2} \leqq a$

②「じ」軸の条件　と　③「き」境界条件
①の条件を満たすとき,
$x>0$ で解をもつ.　⇔　「解の全てが 0 以下」ではない.
⇔　「軸が 0 以下で, 境界切片が 0 以上」ではない.
軸の方程式 $x=\frac{a}{2}$, 境界切片 $0^2-2a\cdot 0+a+1=a+1$ であるから,
「$\frac{a}{2} \leqq 0$ かつ $a+1 \geqq 0$」の否定　⇔　「$-1 \leqq a \leqq 0$」の否定
⇔　$a<-1$ 又は $0<a$

①〜③ より　$\boldsymbol{a<-1}$ **又は** $\boldsymbol{2+2\sqrt{2} \leqq a}$　**…答え**

2. 次の問に答えよ．(S 級 3 分 30 秒, A 級 4 分 30 秒, B 級 6 分 30 秒, C 級 8 分)

(1) $2x^2+(2a-1)x+a+1=0$ を満たすどの実数解 x も $0<x<1$ を満たすとき，a の値の範囲を求めよ．

★「2 次方程式の実数解に **範囲の条件** がある」 ⇒ **「はじき」の条件**

①「は」判別式の条件 実数解をもつ． ⇔ $D \geqq 0$
②「じ」軸の条件 ⇒ $0<$ 軸の x 座標 <1
③「き」境界条件 ⇒ $x=0,1$ のとき左辺は 0 より大

①「は」判別式の条件

$D \geqq 0$ ⇔ $(2a-1)^2-4\cdot 2\cdot(a+1) \geqq 0$ ⇔ $4a^2-4a+1-8a-8 \geqq 0$ ⇔ $4a^2-12a-7 \geqq 0$

$(2a+1)(2a-7) \geqq 0$ ⇔ $a \leqq -\frac{1}{2}$ 又は $\frac{7}{2} \leqq a$

②「じ」軸条件

左辺を 2 次関数と考えた場合，軸の方程式は $x=-\frac{2a-1}{2\cdot 2}=-\frac{2a-1}{4}$

$0<$ 軸の x 座標 <1 ⇔ $0<-\frac{2a-1}{4}<1$ ⇔ $0>2a-1>-4$ ⇔ $-\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2}$

③「き」境界条件

$x=0$ のとき，左辺が 0 より大 ⇔ $a+1>0$ ⇔ $-1<a$

$x=1$ のとき，左辺が 0 より大 ⇔ $2+(2a-1)+a+1>0$ ⇔ $3a+2>0$ ⇔ $-\frac{2}{3}<a$

①〜③ より，$\boldsymbol{-\frac{2}{3}<a \leqq -\frac{1}{2}}$ **…答え**

(2) x についての 2 次方程式 $x^2-2ax+a+1=0$ が正の解をもつとき a の値の範囲を求めよ．

☆余事象で考える

正の解を 1 つでももてばいい． ⇔ 全ての解 x が 0 以下となることはない．

(余事象で考えない解法の場合は，場合分けをしっかりする必要がある．)

★ はじきの条件

①「は」判別式の条件 実数解をもつ ⇔ $D \geqq 0$

$D/4 \geqq 0$ ⇔ $(-a)^2-1\cdot(a+1) \geqq 0$ ⇔ $a^2-a-1 \geqq 0$ ⇔ $a \leqq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 又は $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \leqq a$

②「じ」軸の条件 と ③「き」境界条件

①の条件を満たすとき，

$x>0$ で解をもつ． ⇔ 「解の全てが 0 以下」ではない．

⇔ 「軸が 0 以下で，境界切片が 0 以上」ではない．

軸の方程式 $x=a$，境界切片 $a+1$ であるから，

「$a \leqq 0$ かつ $a+1 \geqq 0$」の否定 ⇔ 「$-1 \leqq a \leqq 0$」の否定

⇔ $a<-1$ 又は $0<a$

①〜③ より $\boldsymbol{a<-1}$ **又は** $\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2} \leqq a}$ **…答え**