反射テスト　２次方程式　連立方程式　難　01

1.　a, b, c は正の実数である. 次の連立方程式を a, b, c について解け.（ S 級 4 分 40 秒, A 級 7 分 30 秒, B 級 10 分, C 級 15 分 ）

$$\begin{cases} a^2+ab+b^2=7 \\ b^2+bc+c^2=28 \\ c^2+ca+a^2=21 \end{cases}$$

2. a, b, c は正の実数である. 次の連立方程式を a, b, c について解け. (S 級 5 分, A 級 7 分 30 秒, B 級 10 分, C 級 15 分)

$$\begin{cases} a^2+ab+b^2=26 \\ b^2+bc+c^2=38 \\ c^2+ca+a^2=14 \end{cases}$$

反射テスト　2次方程式　連立方程式　難　01　解答解説

1. a, b, c は正の実数である. 次の連立方程式を a, b, c について解け.（ S 級 4 分 40 秒, A 級 7 分 30 秒, B 級 10 分, C 級 15 分 ）

$$\begin{cases} a^2+ab+b^2=7 & \cdots ① \\ b^2+bc+c^2=28 & \cdots ② \\ c^2+ca+a^2=21 & \cdots ③ \end{cases}$$

★ 倍率を考える　左辺の全ての項が全て 2 次式であることに注目.

a のからんだ方程式①, ③の右辺が②より小さいので, a が最小と考えて,

正の実数 p, q を用いて, $b=pa$, $c=qa$ とおくと,

$$\begin{cases} a^2+a\cdot pa+(pa)^2=7 \\ (pa)^2+pa\cdot qa+(qa)^2=28 \\ (qa)^2+qa\cdot a+a^2=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2(1+p+p^2)=7 & \cdots ④ \\ a^2(p^2+pq+q^2)=28 & \cdots ⑤ \\ a^2(1+q+q^2)=21 & \cdots ⑥ \end{cases}$$

よって, $a \neq 0$ はありえないので,

$$\begin{cases} 1+p+p^2=\frac{7}{a^2} & \cdots ⑦ \\ p^2+pq+q^2=\frac{28}{a^2} & \cdots ⑧ \\ 1+q+q^2=\frac{21}{a^2} & \cdots ⑨ \end{cases}$$

★ 差の倍率を考える

⑧ − ⑦ より　$q^2+pq-p-1=\frac{21}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad (p+q+1)(q-1)=\frac{21}{a^2}$

⑧ − ⑨ より　$p^2+pq-q-1=\frac{7}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad (p+q+1)(p-1)=\frac{7}{a^2}$

$p+q+1>0$ かつ 上は下の 3 倍　$\Rightarrow \quad q-1=3(p-1) \quad \Leftrightarrow \quad q=3p-2$

⑦ × 3 = ⑨ より,　$3+3p+3p^2=(3p-2)^2+(3p-2)+1 \quad \Leftrightarrow \quad p(p-2)=0$

$p>0$ より, $p=2$.　$\Rightarrow \quad q=3\times 2-2=4$.

⑦から,　$\dfrac{7}{a^2}=1+2+2^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad a=\pm 1 \qquad \therefore \quad a>0$ より $a=1$

$b=pa=2\times 1=2 \qquad c=qa=4\times 1=4 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{(a,b,c)=(1,2,4)}$

☆ H26 年の東大の入試問題を参考に作問. (1) はフェルマー点に関する問題で, (2) は余弦定理かベクトルから上の類題になる. 知識と計算力が必要な東大らしい問題.

☆別解　① × $(a-b)$, ② × $(b-c)$, ③ × $(c-a)$ を考える.

$a^3-b^3=7(a-b)$ かつ $b^3-c^3=28(b-c)$ かつ $c^3-a^3=21(c-a)$

全ての和を考えると　$0=-14a+21b-7c \quad \Leftrightarrow \quad c=3b-2a$

これを②, ③に代入. ② $\Rightarrow a^2-3ab+3b^2=7$. ③ $\Rightarrow 4a^2-14ab+13b^2=28$

前者の 4 倍と後者を比較して, 計算すると　$b=0, 2a$

あとは①と $a>0$ から, $a=1$. $\Rightarrow b=2$, $c=4$.

2. a, b, c は正の実数である. 次の連立方程式を a, b, c について解け.（ S 級 5 分, A 級 7 分 30 秒, B 級 10 分, C 級 15 分 ）

$$\begin{cases} a^2+ab+b^2=26 & \cdots① \\ b^2+bc+c^2=38 & \cdots② \\ c^2+ca+a^2=14 & \cdots③ \end{cases}$$

★ 倍率を考える　左辺の全ての項が全て 2 次式であることに注目.
a のからんだ方程式①, ③の右辺が②より小さいので, a が最小と考えて,
正の実数 p, q を用いて, $b=pa$, $c=qa$ とおくと,

$$\begin{cases} a^2+a\cdot pa+(pa)^2=26 \\ (pa)^2+pa\cdot qa+(qa)^2=38 \\ (qa)^2+qa\cdot a+a^2=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2(1+p+p^2)=26 & \cdots④ \\ a^2(p^2+pq+q^2)=38 & \cdots⑤ \\ a^2(1+q+q^2)=14 & \cdots⑥ \end{cases}$$

よって, $a \neq 0$ はありえないので,

$$\begin{cases} 1+p+p^2=\frac{26}{a^2} & \cdots⑦ \\ p^2+pq+q^2=\frac{38}{a^2} & \cdots⑧ \\ 1+q+q^2=\frac{14}{a^2} & \cdots⑨ \end{cases}$$

★ 差の倍率を考える　比を考えることも同じ.
⑧ − ⑦ より　$q^2+pq-p-1=\frac{12}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad (p+q+1)(q-1)=\frac{12}{a^2}$
⑧ − ⑨ より　$p^2+pq-q-1=\frac{24}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad (p+q+1)(p-1)=\frac{24}{a^2}$
$p+q+1>0$ かつ 下は上の 3 倍　$\Rightarrow \quad 2(q-1)=p-1 \quad \Leftrightarrow \quad p=2q-1$
⑦ = ⑨ × $\frac{13}{7}$ より,　$1+p+p^2=\frac{13}{7}\left(1+q+q^2\right)$
　これに $p=2q-1$ を代入して解くと,　$(5q+1)(q-2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad q=-\frac{1}{5}$, 2 .
$q>0$ より, $q=2$.　$\Rightarrow \quad p=2\times2-1=3$.

⑨から,　$\dfrac{14}{a^2}=1+2+2^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2=2 \quad \Leftrightarrow \quad a=\pm\sqrt{2} \qquad \therefore \quad a>0$ より $a=\sqrt{2}$
　$b=pa=3\times\sqrt{2}=3\sqrt{2} \qquad c=qa=2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{(a,b,c)=\left(\sqrt{2}\,,\,3\sqrt{2}\,,\,2\sqrt{2}\right)}$

☆別解　① × $(a-b)$, ② × $(b-c)$, ③ × $(c-a)$ を考える.
　$a^3-b^3=26(a-b)$ かつ $b^3-c^3=38(b-c)$ かつ $c^3-a^3=14(c-a)$
全ての和を考えると　$0=12a+12b-24c \quad \Leftrightarrow \quad b=2c-a$
これを②, ③に代入して解く.