反射テスト　２次方程式　解と係数の関係　応用　02

1.　次の２次方程式の解を α, β として計算式の値を求めよ．　（ S 級１分 10 秒, A 級２分, B 級３分, C 級４分 ）

(1)　$x^2 - 5x + 3 = 0$ のとき，　$\alpha^2 + \beta^2$

(2)　$x^2 + 2x - 4 = 0$ のとき，　$\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}$

(3)　$3x^2 + 3x - 7 = 0$ のとき，　$\alpha^3 + \beta^3$

(4)　$x^2 - 5kx + 3k^2 = 0$ のとき，　$(\alpha - \beta)^2$

2. 次の 2 次方程式の解を $\alpha,\ \beta$ として計算式の値を求めよ． （ S 級 1 分 50 秒, A 級 3 分, B 級 4 分 30 秒, C 級 6 分 ）

(1) $x^2-6x+4=0$ のとき， $\alpha^2+\beta^2$

(2) $x^2+8x-16=0$ のとき， $\dfrac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha\beta}$

(3) $6x^2-9x-4=0$ のとき， $\alpha^3+\beta^3$

(4) $3x^2-9kx+4k^2=0$ のとき， $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}$

反射テスト　2次方程式　解と係数の関係　応用　02　解答解説

1.　次の2次方程式の解を α, β として計算式の値を求めよ．　（ S 級1分10秒, A 級2分, B 級3分, C 級4分 ）

★ 解と係数の関係

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を α，β としたとき,

$$\boldsymbol{\alpha+\beta=-\frac{b}{a}}\ ,\quad \boldsymbol{\alpha\beta=\frac{c}{a}}$$

(1)　$x^2-5x+3=0$ のとき,　$\alpha^2+\beta^2$

$\alpha+\beta=-\dfrac{-5}{1}=5$

$\alpha\beta=\dfrac{3}{1}=3$

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=5^2-2\times3\\&=\mathbf{19}\end{aligned}$$

(2)　$x^2+2x-4=0$ のとき,　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

$\alpha+\beta=-\dfrac{2}{1}=-2$

$\alpha\beta=\dfrac{-4}{1}=-4$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}&=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\\&=\frac{-2}{-4}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

(3)　$3x^2+3x-7=0$ のとき,　$\alpha^3+\beta^3$

$\alpha+\beta=-\dfrac{3}{3}=-1$

$\alpha\beta=\dfrac{-7}{3}=-\dfrac{7}{3}$

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\&=(-1)^3-3\times\left(-\frac{7}{3}\right)\times(-1)\\&=-1-7=\mathbf{-8}\end{aligned}$$

★対称式の公式

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

(4)　$x^2-5kx+3k^2=0$ のとき,　$(\alpha-\beta)^2$

$\alpha+\beta=-\dfrac{-5k}{1}=5k$

$\alpha\beta=\dfrac{3k^2}{1}=3k^2$

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2&=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\\&=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\\&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2\alpha\beta\\&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=(5k)^2-4\times1\times3k^2\\&=25k^2-12k^2=\boldsymbol{13k^2}\end{aligned}$$

★対称式の公式

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

2. 次の 2 次方程式の解を $\alpha,\ \beta$ として計算式の値を求めよ．（ S 級 1 分 50 秒，A 級 3 分，B 級 4 分 30 秒，C 級 6 分 ）

(1) $x^2-6x+4=0$ のとき，　$\alpha^2+\beta^2$

$\alpha+\beta=-\dfrac{-6}{1}=6$

$\alpha\beta=\dfrac{4}{1}=4$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=6^2-2\times 4$

$=\mathbf{28}$

(2) $x^2+8x-16=0$ のとき，　$\dfrac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha\beta}$

$\alpha+\beta=-\dfrac{8}{1}=-8$

$\alpha\beta=\dfrac{-16}{1}=-16$

$\dfrac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta}-4$

$=\dfrac{(-8)^2}{-16}-4$

$=\dfrac{64}{-16}-4=\mathbf{-8}$

(3) $6x^2-9x-4=0$ のとき，　$\alpha^3+\beta^3$

$\alpha+\beta=-\dfrac{-9}{6}=\dfrac{3}{2}$

$\alpha\beta=\dfrac{-4}{6}=-\dfrac{2}{3}$

$=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=\left(\dfrac{3}{2}\right)^3-3\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)\times\left(\dfrac{3}{2}\right)$

$=\dfrac{27}{8}+3=\mathbf{\dfrac{51}{8}}$

(4) $3x^2-9kx+4k^2=0$ のとき，　$\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}$

$\alpha+\beta=-\dfrac{-9k}{3}=3k$

$\alpha\beta=\dfrac{4k^2}{3}=\dfrac{4}{3}k^2$

$\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{(3k)^3-3\times\dfrac{4}{3}k^2\times 3k}{\dfrac{4}{3}k^3}$

$=\dfrac{27k^3-12k^3}{\dfrac{4}{3}k^2}=\boldsymbol{\dfrac{45}{4}k}$