

反射テスト 2次方程式 判別式と実数解の個数 01

1. 次の2次方程式の実数解の個数を求めよ。(S級1分10秒, A級2分, B級3分, C級4分)

(1) $x^2 - 5x + 5 = 0$

(2) $3x^2 - 4x - 2 = 0$

(3) $3x^2 - 9x + 7 = 0$

(4) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

(5) $x^2 - x - k = 0$

(6) $2x^2 + 16x + k = 0$

2. 次の2次方程式の実数解の個数を求めよ。(S級1分30秒, A級2分20秒, B級3分30秒, C級5分)

(1) $x^2 - 11x + 31 = 0$

(2) $3x^2 - 4x + \sqrt{2} = 0$

(3) $2x^2 - \pi x + 1 = 0$

(4) $\sqrt{3}x^2 - 6x + \sqrt{27} = 0$

(5) $\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 - 3\sqrt{2}x - k = 0$

(6) $4x^2 + 2mx + m - 1 = 0$

反射テスト 2次方程式 判別式と実数解の個数 01

1. 次の2次方程式の実数解の個数を求めよ。(S級1分10秒, A級2分, B級3分, C級4分)

★判別式

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式 D は, $D = b^2 - 4ac$ である.

$D > 0$ ならば, 元の2次方程式は **異なる実数解を2つもつ**.

$D = 0$ ならば, 元の2次方程式は **実数解を1つもつ**. (重解)

$D < 0$ ならば, 元の2次方程式は **実数解をもたない**.

★判別式の偶数公式

2次方程式 $ax^2 + 2bx + c = 0$ の判別式 $D/4$ は, $D/4 = b^2 - ac$ である.

判別式にも, b が偶数の場合のときは, 偶数公式を用いたほうが計算が易しい.

(1) $x^2 - 5x + 5 = 0$

$$D = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 5 > 0$$

よって, 実数解を2つもつ.

2個 …答え

(2) $3x^2 - 4x - 2 = 0$

$$D/4 = (-2)^2 - 3 \times (-2) = 10 > 0$$

よって, 実数解を2つもつ.

2個 …答え

(3) $3x^2 - 9x + 7 = 0$

$$D = (-9)^2 - 4 \times 3 \times 7 = -3 < 0$$

よって, 実数解をもたない.

0個 …答え

(4) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

$$D/4 = (-6)^2 - 9 \times 4 = 0$$

よって, 実数解を1つもつ.

1個 …答え

(5) $x^2 - x - k = 0$

$$D = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-k) = 1 + 4k$$

場合分け

$$\begin{cases} 1 + 4k > 0 \text{ ならば, 実数解を2つもつ} \\ 1 + 4k = 0 \text{ ならば, 実数解を1つもつ} \\ 1 + 4k < 0 \text{ ならば, 実数解をもたない} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k > -\frac{1}{4} \text{ ならば } 2 \text{ 個} \\ k = -\frac{1}{4} \text{ ならば } 1 \text{ 個} \quad \dots \text{答え} \\ k < -\frac{1}{4} \text{ ならば } 0 \text{ 個} \end{cases}$$

(6) $2x^2 + 16x + k = 0$

$$D/4 = 8^2 - 2 \times k = 64 - 2k$$

場合分け

$$\begin{cases} 64 - 2k > 0 \text{ ならば, 実数解を2つもつ} \\ 64 - 2k = 0 \text{ ならば, 実数解を1つもつ} \\ 64 - 2k < 0 \text{ ならば, 実数解をもたない} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k < 32 \text{ ならば } 2 \text{ 個} \\ k = 32 \text{ ならば } 1 \text{ 個} \quad \dots \text{答え} \\ k > 32 \text{ ならば } 0 \text{ 個} \end{cases}$$

2. 次の2次方程式の実数解の個数を求めよ。(S級1分30秒, A級2分20秒, B級3分30秒, C級5分)

(1) $x^2 - 11x + 31 = 0$

$$D = (-11)^2 - 4 \times 1 \times 31 = -3 < 0$$

よって、実数解をもたない。

0個 …答え

(2) $3x^2 - 4x + \sqrt{2} = 0$

$$D/4 = (-2)^2 - 3 \times \sqrt{2} = 4 - 3\sqrt{2} < 0$$

よって、実数解をもたない。

0個 …答え

(3) $2x^2 - \pi x + 1 = 0$

$$D = \pi^2 - 4 \times 2 \times 1 = \pi^2 - 8 > 0$$

よって、実数解を2つもつ。

2個 …答え

(4) $\sqrt{3}x^2 - 6x + \sqrt{27} = 0$

$$D/4 = (-3)^2 - \sqrt{3} \times \sqrt{27} = 0$$

よって、実数解を1つもつ。

1個 …答え

(5) $\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 - 3\sqrt{2}x - k = 0$

$$D = (-3\sqrt{2})^2 - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{4} \times (-k) = 18 + \sqrt{2}k$$

場合分け

$$\begin{cases} 18 + \sqrt{2}k > 0 \text{ ならば, 実数解を2つもつ} \\ 18 + \sqrt{2}k = 0 \text{ ならば, 実数解を1つもつ} \\ 18 + \sqrt{2}k < 0 \text{ ならば, 実数解をもたない} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k > -9\sqrt{2} \text{ ならば } 2 \text{ 個} \\ k = -9\sqrt{2} \text{ ならば } 1 \text{ 個} \\ k < -9\sqrt{2} \text{ ならば } 0 \text{ 個} \end{cases} \quad \dots \text{答え}$$

(6) $4x^2 + 2mx + m - 1 = 0$

$$\begin{aligned} D/4 &= m^2 - 4 \times (m - 1) \\ &= m^2 - 4m + 4 \\ &= (m - 2)^2 \end{aligned}$$

場合分け

$$\begin{cases} m - 2 \neq 0 \text{ ならば, 実数解を2つもつ} \\ m - 2 = 0 \text{ ならば, 実数解を1つもつ} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \neq 2 \text{ ならば } 2 \text{ 個} \\ m = 2 \text{ ならば } 1 \text{ 個} \end{cases} \quad \dots \text{答え}$$

☆ポイント

Aが実数であるとき, $A^2 \geq 0$

($A^2 = 0$ になるのは, $A = 0$ のときだけ)