

## 反射テスト 2次不等式 定数 $a$ の入った式 01

1. 次の不等式を実数の範囲内で解け。(S級3分40秒, A級5分, B級7分, C級10分)

(1)  $x^2 - a > 0$

(2)  $x^2 - 7ax + 12a^2 < 0$

(3)  $x^2 - 2ax + a^2 - 1 \geq 0$

(4)  $x^2 + 6x - a^2 + 2a + 8 \leq 0$

2. 次の不等式を実数の範囲内で解け。(S級4分, A級6分, B級9分, C級12分)

(1)  $x^2 - a \leq 0$

(2)  $x^2 + 8ax + 12a^2 \geq 0$

(3)  $x^2 - 2ax - 2x + a^2 + 2a \leq 0$

(4)  $x^2 + ax - 2a^2 + 3x + 3a + 2 \leq 0$

# 反射テスト 2次不等式 定数 $a$ の入った式 01 解答解説

1. 次の不等式を実数の範囲内で解け。(S級3分40秒, A級5分, B級7分, C級10分)

## ★定数 $a$ の入った不等式

定数の正負に注意する.

左辺を因数分解をする.

大小関係に留意して, 必要とあれば場合分けをする.

(1)  $x^2 - a > 0$

$\Leftrightarrow x^2 > a$

答え  $\begin{cases} a < 0 \text{ のとき} & x \text{ は全ての実数.} \\ a = 0 \text{ のとき} & x \neq 0 \\ a > 0 \text{ のとき} & x < -\sqrt{a} \text{ または } \sqrt{a} < x \end{cases}$

☆  $a = 0$  のときは,  $a > 0$  に含んでもよい.

(2)  $x^2 - 7ax + 12a^2 < 0$

$\Leftrightarrow (x - 3a)(x - 4a) < 0$

$3a$  と  $4a$  の大小を考えて,  $a$  が正負かで場合分け.

$a < 0$  のとき  $4a < 3a$

$a = 0$  のとき  $x^2 < 0$  より, 解なしと考える.

$a > 0$  のとき  $3a < 4a$

答え  $\begin{cases} a < 0 \text{ のとき} & 4a < x < 3a \\ a = 0 \text{ のとき} & x \text{ は解なし} \\ a > 0 \text{ のとき} & 3a < x < 4a \end{cases}$

(3)  $x^2 - 2ax + a^2 - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + (a+1)(a-1) \geq 0$

$\Leftrightarrow \{x - (a+1)\}\{x - (a-1)\} \geq 0$

$a+1$  と  $a-1$  の大小を比べると,

$a-1 < a+1$  ←☆

$\therefore x \leq a-1$  又は  $a+1 \leq x$  …答え

☆ポイント

$a-1$  と  $a+1$  それぞれから,  $a$  を引けば,

$-1$  と  $+1$  である.

$\therefore -1 < +1 \Leftrightarrow a-1 < a+1$

(4)  $x^2 + 6x - a^2 + 2a + 8 \leq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x - (a^2 - 2a - 8) \leq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x - (a+2)(a-4) \leq 0$

$\Leftrightarrow \{x + (a+2)\}\{x - (a-4)\} \leq 0$

$-(a+2)$  と  $a-4$  の大小を比べると, ←☆

$-(a+2) = a-4 \Leftrightarrow a = 1$  より,

$a < 1$  のとき  $-(a+2) > a-4$

$a = 1$  のとき  $-(a+2) = a-4 = -3$

$a > 1$  のとき  $-(a+2) < a-4$

$a = 1$  のときは,  $(x+3)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow -3 \leq x \leq -3 \Leftrightarrow x = -3$

答え  $\begin{cases} a < 1 \text{ のとき} & a-4 \leq x \leq -a-2 \\ a = 1 \text{ のとき} & x = -3 \\ a > 1 \text{ のとき} & -a-2 \leq x \leq a-4 \end{cases}$

☆ポイント

等しくなければどちらかが大きい.

境界である等号のときを調べ,

あとは数字を代入すれば判別できる.

例えば,  $a < 1$  であれば  $a = 0$  を代入すれば

$-(a+2) = -2$ ,  $a-4 = -4$  で,  $-(a+2)$  のほうが大.

2. 次の不等式を実数の範囲内で解け。(S級4分, A級6分, B級9分, C級12分)

(1)  $x^2 - a \leq 0$

$\Leftrightarrow x^2 \leq a$

答え  $\begin{cases} a < 0 \text{ のとき} & x \text{ は解なし.} \\ a = 0 \text{ のとき} & x = 0 \\ a > 0 \text{ のとき} & -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a} \end{cases}$

☆  $a = 0$  のときは,  $a > 0$  に含んでもよい.

(2)  $x^2 + 8ax + 12a^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x + 2a)(x + 6a) \geq 0$

$2a$  と  $6a$  の大小を考えて,  $a$  が正負かで場合分け.

$a < 0$  のとき  $-2a < -6a$

$a = 0$  のとき  $x^2 \geq 0$  より, 全ての実数で成立.

$a > 0$  のとき  $-6a < -2a$

答え  $\begin{cases} a < 0 \text{ のとき} & x \leq -2a \text{ または } -6a \leq x \\ a = 0 \text{ のとき} & x \text{ は全ての実数} \\ a > 0 \text{ のとき} & x \leq -6a \text{ または } -2a \leq x \end{cases}$

(3)  $x^2 - 2ax - 2x + a^2 + 2a \leq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - (2a + 2)x + a(a + 2) \leq 0$

$\Leftrightarrow (x - a)\{x - (a + 2)\} \leq 0$

$a$  と  $a + 2$  の大小を比べると,

$a < a + 2$

$\therefore a \leq x \leq a + 2$  ...答え

(4)  $x^2 + ax - 2a^2 + 3x + 3a + 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + (a + 3)x - (2a^2 - 3a - 2) \leq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + (a + 3)x - (2a + 1)(a - 2) \leq 0$

$\Leftrightarrow \{x + (2a + 1)\}\{x - (a - 2)\} \leq 0$

$-(2a + 1)$  と  $a - 2$  の大小を比べる.

$-(2a + 1) = a - 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$  より,

$a < \frac{1}{3}$  のとき  $-(2a + 1) > a - 2$

$a = \frac{1}{3}$  のとき  $-(2a + 1) = a - 2 = -\frac{5}{3}$

$a > \frac{1}{3}$  のとき  $-(2a + 1) < a - 2$

$a = \frac{1}{3}$  のときは,  $(x + \frac{5}{3})^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leq x \leq -\frac{5}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$

答え  $\begin{cases} a < \frac{1}{3} \text{ のとき} & a - 2 \leq x \leq -2a - 1 \\ a = \frac{1}{3} \text{ のとき} & x = -\frac{5}{3} \\ a > \frac{1}{3} \text{ のとき} & -2a - 1 \leq x \leq a - 2 \end{cases}$