反射テスト　２次不等式　判別式に関する応用　01

1.　次の問いに答えよ.（ S 級 2 分 30 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

(1)　$x^2 - mx + 4 > 0$ が全ての実数 x で成り立つように, 定数 m の値の範囲を定めよ.

(2)　$x^2 + 2kx + 3k(k-4) < 0$ を満たす実数 x が存在しないように, 定数 k の値の範囲を定めよ.

(3)　$x^2 + 2ax + 3(2a-3) \geqq 0$ が全ての実数 x で成り立つように, 定数 a の値の範囲を定めよ.

(4)　$\dfrac{1}{2}x^2 + (k+2)x + 5k \leqq 0$ を満たす実数 x が存在しないように, 定数 k の値の範囲を定めよ.

2. 次の問いに答えよ.（ S 級 3 分, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分 ）

(1) $x^2 - 6mx + 4 > 0$ が全ての実数 x で成り立つように, 定数 m の値の範囲を定めよ.

(2) $x^2 - 3kx - 3k(1-k) < 0$ を満たす実数 x が存在しないように, 定数 k の値の範囲を定めよ.

(3) $x^2 + 2(a-1)x + 4 - 5a \geqq 0$ が全ての実数 x で成立するように, 定数 a の値の範囲を定めよ.

(4) $\dfrac{5}{2}x^2 + (k+6)x + \dfrac{k^2+9}{2} \leqq 0$ を満たす実数 x が存在しないように, 定数 k の値の範囲を定めよ.

反射テスト　２次不等式　判別式に関する応用　01　解答解説

1.　次の問いに答えよ.（S 級 2 分 30 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分）

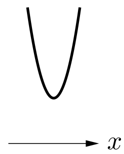
★ 2 次不等式の条件

2 次不等式の係数を問う問題では，常に式の整理をして， x^2 の係数が正で，右辺が 0 になるようにする．そうすることによって，$y =$ 左辺 の関数は常に下に凸となり，イメージを把握しやすい.（$D < 0$ と $D = 0$ のイメージを把握しておくこと．）

左辺 > 0　があらゆる実数 x で成り立つ　$\Leftrightarrow$　左辺の判別式 $D < 0$
左辺 $\geqq 0$　があらゆる実数 x で成り立つ　$\Leftrightarrow$　左辺の判別式 $D \leqq 0$
左辺 < 0　を満たす実数 x が存在しない　$\Leftrightarrow$　左辺の判別式 $D \leqq 0$
左辺 $\leqq 0$　を満たす実数 x が存在しない　$\Leftrightarrow$　左辺の判別式 $D < 0$

(1)　$x^2 - mx + 4 > 0$ が全ての実数 x で成り立つように，定数 m の値の範囲を定めよ．

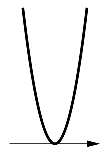
$D < 0$



$y =$ 左辺 という関数が，
左図のようになればよい．
よって，$D < 0$
$D = (-m)^2 - 4 \times 4 = m^2 - 16$
$\therefore$　$m^2 - 16 < 0$
$\Leftrightarrow$　$(m + 4)(m - 4) < 0$
$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{-4 < m < 4}$　**…答え**

(2)　$x^2 + 2kx + 3k(k - 4) < 0$ を満たす実数 x が存在しないように，定数 k の値の範囲を定めよ．

$D = 0$



$y =$ 左辺 という関数が，
(1) の図か，左図のようになればよい．
よって，$D \leqq 0$
$D/4 = k^2 - 3k(k - 4) = -2k^2 + 12k$
$\therefore$　$-2k^2 + 12k \leqq 0$
$\Leftrightarrow$　$k^2 - 6k \geqq 0$
$\Leftrightarrow$　$k(k - 6) \geqq 0$
$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{k \leqq 0}$ **または** $\boldsymbol{6 \leqq k}$　**…答え**

(3)　$x^2 + 2ax + 3(2a - 3) \geqq 0$ が全ての実数 x で成り立つように，定数 a の値の範囲を定めよ．

(1)，(2) の図のイメージで考えて，$D \leqq 0$
$D/4 = a^2 - 3(2a - 3) = a^2 - 6a + 9$
$\therefore$　$a^2 - 6a + 9 \leqq 0$
$\Leftrightarrow$　$(a - 3)^2 \leqq 0$
$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{a = 3}$　**…答え**

(4)　$\dfrac{1}{2}x^2 + (k + 2)x + 5k \leqq 0$ を満たす実数 x が存在しないように，定数 k の値の範囲を定めよ．

両辺に 2 をかけて，
$x^2 + 2(k + 2)x + 10k \leqq 0$

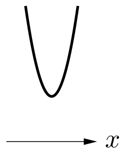
(1) の図のイメージで考えて，$D < 0$　←☆
$D/4 = (k + 2)^2 - 10k = k^2 - 6k + 4$
$\therefore$　$k^2 - 6k + 4 < 0$
$\Leftrightarrow$　$\{k - (3 - \sqrt{5})\}\{k - (3 + \sqrt{5})\} < 0$
$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{3 - \sqrt{5} < k < 3 + \sqrt{5}}$　**…答え**

☆ポイント
(2) の図の場合を入れると，左辺 $= 0$ を満たす x があるので，不適当．

2. 次の問いに答えよ.（S 級 3 分, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分）

(1) $x^2-6mx+4>0$ が全ての実数 x で成り立つように, 定数 m の値の範囲を定めよ.

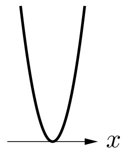
$D<0$



$y=$ 左辺 という関数が,
左図のようになればよい.
よって, $D<0$
$D/4=(-3m)^2-1\times 4=9m^2-4$
$\therefore\quad 9m^2-4<0$
$\Leftrightarrow\quad (3m+2)(3m-2)<0$
$\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{-\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3}}$ **…答え**

(2) $x^2-3kx-3k(1-k)<0$ を満たす実数 x が存在しないように, 定数 k の値の範囲を定めよ.

$D=0$



$y=$ 左辺 という関数が,
(1) の図か, 左図のようになればよい.
よって, $D\leqq 0$
$D=(-3k)^2-4\cdot\{-3k(1-k)\}=-3k^2+12k$
$\therefore\quad -3k^2+12k\leqq 0$
$\Leftrightarrow\quad k^2-4k\geqq 0$
$\Leftrightarrow\quad k(k-4)\geqq 0$
$\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{k\leqq 0}$ **または** $\boldsymbol{4\leqq k}$ **…答え**

(3) $x^2+2(a-1)x+4-5a\geqq 0$ が全ての実数 x で成立するように, 定数 a の値の範囲を定めよ.

(1), (2) の図のイメージで考えて, $D\leqq 0$
$D/4=(a-1)^2-(4-5a)=a^2+3a-3$
$\therefore\quad a^2+3a-3\leqq 0$
$\Leftrightarrow\quad \left(a-\frac{-3-\sqrt{21}}{2}\right)\left(a-\frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right)\leqq 0$
$\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{\frac{-3-\sqrt{21}}{2}\leqq a\leqq \frac{-3+\sqrt{21}}{2}}$ **…答え**

(4) $\frac{5}{2}x^2+(k+6)x+\frac{k^2+9}{2}\leqq 0$ を満たす実数 x が存在しないように, 定数 k の値の範囲を定めよ.

両辺に 2 をかけて,
$5x^2+2(k+6)x+k^2+9\leqq 0$

(1) の図のイメージで考えて, $D<0$ ←☆
$D/4=(k+6)^2-5(k^2+9)=-4k^2+12k-9$
$\therefore\quad -4k^2+12k-9<0$
$\Leftrightarrow\quad 4k^2-12k+9>0$
$\Leftrightarrow\quad (2k-3)^2>0$
$\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{k\neq\frac{3}{2}}$ **…答え**