反射テスト　2次不等式　いろいろ　01

1.　次の不等式を解け.（ S 級 2 分 50 秒, A 級 3 分 40 秒, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

(1)　$5-4x^2 \leqq 3$

(2)　$\dfrac{1}{2}x(x-1) < 4x$

(3)　$x^2+4x+11 > x+2$

(4)　$-x(x+3)+3 \geqq 3(x-7)$

(5)　$(x-2)^3 \geqq (x+2)^3$

(6)　$-2(x-4)(2x-5) \geqq (8-2x)(x-1)$

2. 次の不等式を解け.（ S 級 3 分 20 秒, A 級 4 分 30 秒, B 級 6 分, C 級 8 分 ）

(1) $4-x^2 \leqq 2(3-2x^2)$

(2) $\dfrac{3}{2}(1-x^2) < 4x$

(3) $x^2+5(x+2) > 1-x$

(4) $(x+2)^2 \leqq 2x(x-1)$

(5) $7x^3+(x-1)^3 \leqq (2x+1)^3$

(6) $-6(1-x)(5-3x) > 20-12x$

反射テスト　2次不等式　いろいろ　01　解答解説

1.　次の不等式を解け.（ S 級 2 分 50 秒, A 級 3 分 40 秒, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

★ 2 次不等式の解法のまとめ　〜わからなければグラフを描く！

①　x の 1 次の項がなければ, x^2 を左辺, 他を右辺に移項して解く.

②　x の 1 次の項があれば, x^2 の係数が正, 右辺が 0 になるように整理する.
　　さらに左辺の因数分解ができればする. できなければ, 左辺に関する判別式 D の正負を調べる.
　　$D > 0$ であれば 左辺 $= 0$ として解き（解の公式など), x 軸との交点を 2 つ求める.
　　$D = 0$ であれば 左辺 $= 0$ として解き（解の公式など), x 軸との接点を求める.
　　$D < 0$ であれば 左辺は常に 0 より大きくなり, x 軸との交点はない.
　　　$y =$ 左辺 とした 2 次関数のグラフと x 軸の位置関係から, 解を求める.

(1)　$5 - 4x^2 \leqq 3$

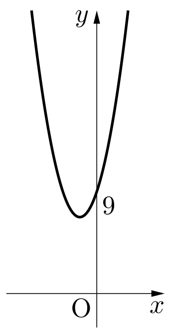
$\Leftrightarrow$　$-4x^2 \leqq -2$
$\Leftrightarrow$　$x^2 \geqq \frac{1}{2}$　←両辺 $\div (-4)$
$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{x \leqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ **又は** $\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq x}$　**…答え**

(2)　$\dfrac{1}{2}x(x-1) < 4x$

$\Leftrightarrow$　$x(x-1) < 8x$　←両辺 $\times 2$
$\Leftrightarrow$　$x^2 - 9x < 0$
$\Leftrightarrow$　$x(x-9) < 0$
$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{0 < x < 9}$　**…答え**

(3)　$x^2 + 4x + 11 > x + 2$

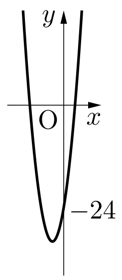
$y = x^2 + 3x + 9$



$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 11 > x + 2$
$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 9 > 0$
左辺の判別式
$D = 3^2 - 4 \times 1 \times 9 = -27 < 0$
判別式が負だから,
左図のように x 軸との交点がない.
常に $x^2 + 3x + 9$ は正である
（x 軸の上にある）から,
常に $y > 0$ である.
$\therefore$　**$\boldsymbol{x}$ は全ての実数　…答え**

(4)　$-x(x+3) + 3 \geqq 3(x-7)$

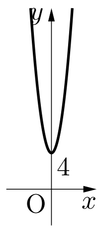
$y = x^2 + 6x - 24$



$\Leftrightarrow$　$-x^2 - 3x + 3 \geqq 3x - 21$
$\Leftrightarrow$　$-x^2 - 6x + 24 \geqq 0$
$\Leftrightarrow$ $x^2 + 6x - 24 \leqq 0$　←両辺 $\times (-1)$
左辺の判別式
$D/4 = 3^2 - 1 \times (-24) = 33 > 0$
判別式が正だから,
左図のように x 軸との交点がある.
解の公式より,
$\Leftrightarrow$ $\{x - (-3 - \sqrt{33})\}\{x - (-3 + \sqrt{33})\} \leqq 0$
$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{-3 - \sqrt{33} \leqq x \leqq -3 + \sqrt{33}}$　**…答え**

(5)　$(x-2)^3 \geqq (x+2)^3$

$y = 3x^2 + 4$

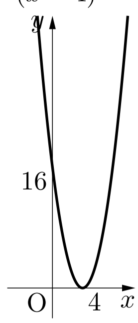


$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
　　$\geqq x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
$\Leftrightarrow$　$-12x^2 - 16 \geqq 0$
$\Leftrightarrow$ $3x^2 + 4 \leqq 0$　←両辺 $\div (-4)$
左辺の判別式
$D/4 = 0^2 - 3 \times 4 = -12 < 0$
判別式が負 $\Leftrightarrow$ x 軸との交点がない.
常に $3x^2 + 4$ は正であるから,
常に $y > 0$ である.

$\boldsymbol{x}$ は解なし　…答え

(6)　$-2(x-4)(2x-5) \geqq (8-2x)(x-1)$

$y = (x-4)^2$



$\Leftrightarrow$　$-2(x-4)(2x-5) \geqq (8-2x)(x-1)$
$\Leftrightarrow$　$-2(x-4)(2x-5) \geqq -2(x-4)(x-1)$
$\Leftrightarrow$ $(x-4)(2x-5) \leqq (x-4)(x-1)$
$\Leftrightarrow$ $(x-4)\{(2x-5) - (x-1)\} \leqq 0$
$\Leftrightarrow$ $(x-4)^2 \leqq 0$
左辺が重解の形 $\Leftrightarrow$ 判別式 $D = 0$
判別式が 0 だから, x 軸に接する.
y の値が 0 以下になるのは,
$x = 4$ のときのみである.

$\boldsymbol{x = 4}$　**…答え**

2. 次の不等式を解け.（S 級 3 分 20 秒，A 級 4 分 30 秒，B 級 6 分，C 級 8 分）

(1) $4 - x^2 \leqq 2(3 - 2x^2)$

$\Leftrightarrow \quad 4 - x^2 \leqq 6 - 4x^2$

$\Leftrightarrow \quad 3x^2 \leqq 2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 \leqq \dfrac{2}{3}$ ←両辺 $\div 3$

$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{\dfrac{2}{3}} \leqq x \leqq \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{6}}{3} \leqq x \leqq \dfrac{\sqrt{6}}{3}}$ **…答え**

(2) $\dfrac{3}{2}(1 - x^2) < 4x$

$\Leftrightarrow \quad 3(1 - x^2) < 8x$ ←両辺 $\times 2$

$\Leftrightarrow \quad 3 - 3x^2 - 8x < 0$

$\Leftrightarrow \quad -3x^2 - 8x + 3 < 0$

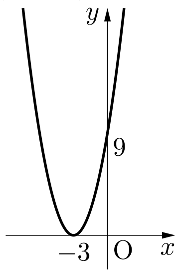
$\Leftrightarrow \quad 3x^2 + 8x - 3 > 0$ ←両辺 $\times(-1)$

$\Leftrightarrow \quad (x + 3)(3x - 1) > 0$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x < -3}$ **又は** $\boldsymbol{\dfrac{1}{3} < x}$ **…答え**

(3) $x^2 + 5(x + 2) > 1 - x$

$y = (x^2 + 3)^2$



$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 10 > 1 - x$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 > 0$

$\Leftrightarrow (x + 3)^2 > 0$

左辺が重解の形 $\Leftrightarrow$ 判別式 $D = 0$

判別式が 0 だから，x 軸に接する.

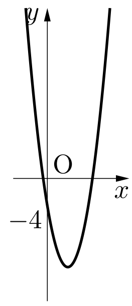
よって $x = -3$ のときのみ

$y = 0$ となって不適当.

$\boldsymbol{x \neq -3}$ **…答え**

(4) $(x + 2)^2 \leqq 2x(x - 1)$

$y = x^2 + 6x - 4$



$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 \leqq 2x^2 - 2x$

$\Leftrightarrow \ -x^2 + 6x + 4 \leqq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 4 \geqq 0$ ←両辺 $\times(-1)$

左辺の判別式

$D/4 = (-3)^2 - 1 \times (-4) = 13 > 0$

判別式が正だから，

左図のように x 軸との交点がある.

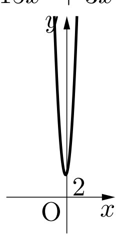
解の公式より，

$\Leftrightarrow \ \left\{x - (3 - \sqrt{13})\right\}\left\{x - (3 + \sqrt{13})\right\} \leqq 0$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x \leqq 3 - \sqrt{13}}$ **または** $\boldsymbol{3 + \sqrt{13} \leqq x}$ **…答え**

(5) $7x^3 + (x - 1)^3 \leqq (2x + 1)^3$

$y = 15x^2 + 3x + 2$



$\Leftrightarrow 7x^3 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$\qquad \leqq 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

$\Leftrightarrow \ -15x^2 - 3x - 2 \leqq 0$

$\Leftrightarrow 15x^2 + 3x + 2 \geqq 0$ ←両辺 $\times(-1)$

左辺の判別式

$D = 3^2 - 4 \cdot 15 \cdot 2 = -111 < 0$

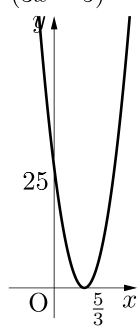
判別式が負 $\Leftrightarrow$ x 軸との交点がない.

常に $y > 0$ である.

$\boldsymbol{x}$ **は全ての実数 …答え**

(6) $-6(1 - x)(5 - 3x) > 20 - 12x$

$y = (3x - 5)^2$



$\Leftrightarrow \ -6(x - 1)(3x - 5) > -12x + 20$

$\Leftrightarrow \ -6(x - 1)(3x - 5) > -4(3x - 5)$

$\Leftrightarrow 3(x - 1)(3x - 5) < 2(3x - 5)$

$\Leftrightarrow (3x - 5)\{(3(x - 1) - 2\} < 0$

$\Leftrightarrow (3x - 5)^2 < 0$

左辺が重解の形 $\Leftrightarrow$ 判別式 $D = 0$

判別式が 0 だから，x 軸に接する.

常に $y \geqq 0$ であるから解はない.

$\boldsymbol{x}$ **は解なし …答え**