反射テスト　１次方程式　文字定数　連立方程式　01

1.　a , x , y は実数である．x, y について解け．(S 級 55 秒, A 級 2 分, B 級 3 分 30 秒, C 級 6 分)

(1)　$\begin{cases} x+y=3a \\ 3x-y=a \end{cases}$

(2)　$\begin{cases} 2ax-3y=5a \\ ax-2y=3a \end{cases}$

2. a , b , x , y は実数である． x, y について解け．(S 級 1 分 30 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 8 分)

(1) $\begin{cases} x+y=7a+2b \\ 4x-y=3a-2b \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y=a^2 \\ x-ay=1 \end{cases}$

反射テスト　1次方程式　文字定数　連立方程式　01　解答解説

1.　a, x, y は実数である．x, y について解け．(S 級 55 秒，A 級 2 分，B 級 3 分 30 秒，C 級 6 分)

★ 連立 1 次方程式

x, y について解くということは，$\begin{cases} x = (x, y \text{ の入らない式}) \\ y = (x, y \text{ の入らない式}) \end{cases}$ を導くことである．

具体的にいえば，次のような解法手順になる．

① x か y の **どちらかを消去**.

② 残ったほうの文字について解く．

③ その解を元の式などに代入して，もう一方を求める．

(1) $\begin{cases} x + y = 3a & \cdots ① \\ 3x - y = a & \cdots ② \end{cases}$

x と y について連立方程式を解く．

① + ② より，y を消去すると，　$4x = 4a \iff x = a$

① に代入して，　$a + y = 3a \iff y = 2a$

$\therefore$　$\boldsymbol{x = a}$ **かつ** $\boldsymbol{y = 2a}$

☆ a を数字のように扱うイメージで変形する．

(2) $\begin{cases} 2ax - 3y = 5a & \cdots ① \\ ax - 2y = 3a & \cdots ② \end{cases}$

① − ② × 2 より，x を消去する．

$2ax - 3y = 5a \quad \leftarrow \quad ①$

$2ax - 4y = 6a \quad \leftarrow \quad ② \times 2$

差より，　$y = -a$

これを ② に代入して，

$ax - 2 \times (-a) = 3a \iff ax = a$

$\begin{cases} a = 0 \text{ のとき,} & 0x = 0 \iff x \text{ は全ての実数} \\ a \neq 0 \text{ のとき,} & ax = a \iff x = 1 \end{cases}$

答え　$\begin{cases} \boldsymbol{a = 0} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{x} \textbf{ は全ての実数 かつ } \boldsymbol{y = 0} \\ \boldsymbol{a \neq 0} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{x = 1} \textbf{ かつ } \boldsymbol{y = -a} \end{cases}$

☆別解　「全ての実数」を文字で表す．

答え　$\begin{cases} \boldsymbol{a = 0} \textbf{ のとき,} & \boldsymbol{x = k} \textbf{ かつ } \boldsymbol{y = 0} \quad \textbf{(ただし } \boldsymbol{k} \textbf{ は実数)} \\ \boldsymbol{a \neq 0} \textbf{ のとき,} & \boldsymbol{x = 1} \textbf{ かつ } \boldsymbol{y = -a} \end{cases}$

この表現のほうが適切なことがあるし，計算もできるため便利．

正確にいうと，この k は **「ある実数」** と言うべきで，この **「ある実数」** が **「あらゆる実数」** になる可能性に留意しよう．

☆両辺 ÷ (文字式) について考えるときは，0 についての場合分けをすること．

2. a, b, x, y は実数である．x, y について解け．(S 級 1 分 30 秒，A 級 3 分，B 級 5 分，C 級 8 分)

(1) $\begin{cases} x+y=7a+2b & \cdots ① \\ 4x-y=3a-2b & \cdots ② \end{cases}$

① + ② より，$5x=10a \iff x=2a$

① に代入して，$2a+y=7a+2b \iff y=5a+2b$

$\therefore$ **$x=2a$ かつ $y=5a+2b$**

(2) $\begin{cases} x+y=a^2 & \cdots ① \\ x-ay=1 & \cdots ② \end{cases}$

① − ② より，x を消去する．
$y+ay=a^2-1 \iff y(1+a)=(a+1)(a-1) \quad \cdots ③$

場合分けが必要である．
$a+1=0$ であるかどうかがキーポイントなので，
まず $a+1=0$ を解く． $\iff a=-1$

$a=-1$ のとき，
式③は $0y=0$ となって，y は全ての実数
$a\neq -1$ のとき，
式③は 両辺 $\div(a+1)$ が可能 $\Rightarrow y=a-1$

それぞれを式①に代入したいが，$a=-1$ のときは，y は全ての実数であるので，$y=k$ とおいて表す．
$a=-1$ のとき，$y=k$ (k は全ての実数) と考えて，①に代入すると，
$x+k=(-1)^2 \iff x=-k+1$
$a\neq -1$ のとき，$y=a-1$ を①に代入して，
$x+(a-1)=a^2 \iff x=a^2-a+1$

答え $\begin{cases} \boldsymbol{a=-1} \textbf{ のとき，} & \boldsymbol{x=-k+1} \textbf{ かつ } \boldsymbol{y=k} \quad \textbf{(} \boldsymbol{k} \textbf{ は実数)} \\ \boldsymbol{a\neq -1} \textbf{ のとき，} & \boldsymbol{x=a^2-a+1} \textbf{ かつ } \boldsymbol{y=a-1} \end{cases}$

☆ 1(2) と異なり，「全ての実数」という表現では答えを言うのが難しい．上の表現に慣れよう．