

反射テスト 1次方程式 文字定数 場合分け 02

1. a, b, x は実数である. 次の方程式を x について解け. (S 級 2分 10秒, A 級 3分 30秒, B 級 5分, C 級 7分)

(1) $ax = a + 1$

(2) $ax = x + 1$

(3) $ax = a + b$

(4) $(a^2 + b^2)(x - 1) = 2ab + 2b^2x$

2. a, b, x は実数である. 次の方程式を x について解け. (S 級 2 分 30 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 9 分)

(1) $3a(x+1) = 6$

(2) $a(x+1) = 3 - 2x$

(3) $ax - b = bx - a$

(4) $a^2(x-1) = b^2x + ab$

反射テスト 1次方程式 文字定数 場合分け 02 解答解説

1. a, b, x は実数である. 次の方程式を x について解け. (S級 2分10秒, A級 3分30秒, B級 5分, C級 7分)

★1次方程式 $ax = b$

方程式 $ax = b$ を x について解く場合, 両辺 $\div a$ をしなければならない.

しかし, $a = 0$ のときは, 両辺を 0 で割ることになるため, 矛盾を導く.

よって, 「 $a = 0$ のとき」と, 「 $a \neq 0$ のとき」に場合分けする必要がある.

(1) $ax = a + 1$

$$\begin{cases} a = 0 \text{ のとき} & 0x = 1 \Leftrightarrow x \text{ は解なし} \\ a \neq 0 \text{ のとき} & ax = a + 1 \Leftrightarrow x = \frac{a+1}{a} \end{cases}$$

答え $\begin{cases} a = 0 \text{ のとき} & x \text{ は解なし} \\ a \neq 0 \text{ のとき} & x = \frac{a+1}{a} \end{cases}$

(2) $ax = x + 1$

$$\Leftrightarrow (a-1)x = 1$$

$$\begin{cases} a-1 = 0 \text{ のとき} & 0x = 1 \Leftrightarrow x \text{ は解なし} \\ a-1 \neq 0 \text{ のとき} & (a-1)x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{a-1} \end{cases}$$

答え $\begin{cases} a = 1 \text{ のとき} & x \text{ は解なし} \\ a \neq 1 \text{ のとき} & x = \frac{1}{a-1} \end{cases}$

(3) $ax = a + b$

$$a = 0 \text{ のとき} \quad 0x = b$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \text{ のとき} & 0x = 0 \Leftrightarrow x \text{ は全ての实数} \\ b \neq 0 \text{ のとき} & 0x = b \Leftrightarrow x \text{ は解なし} \end{cases}$$

$$a \neq 0 \text{ のとき} \quad ax = a + b \Leftrightarrow x = \frac{a+b}{a}$$

答え $\begin{cases} a = b = 0 \text{ のとき} & x \text{ は全ての实数} \\ a = 0 \text{ かつ } b \neq 0 \text{ のとき} & x \text{ は解なし} \\ a \neq 0 \text{ のとき} & x = \frac{a+b}{a} \end{cases}$

(4) $(a^2 + b^2)(x - 1) = 2ab + 2b^2x$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)x = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)x = (a+b)^2$$

$$a+b = 0 \text{ のとき}$$

$$0x = 0 \Leftrightarrow x \text{ は全ての实数}$$

$$a+b \neq 0 \text{ かつ } a-b = 0 \text{ のとき}$$

$$0x = a+b$$

右辺は 0 ではないから x は解なし

$$a+b \neq 0 \text{ かつ } a-b \neq 0 \text{ のとき}$$

$$(a+b)(a-b)x = (a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow (a-b)x = a+b$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a+b}{a-b}$$

答え $\begin{cases} a+b = 0 \text{ のとき} & x \text{ は全ての实数} \\ a+b \neq 0 \text{ かつ } a = b \text{ のとき} & x \text{ は解なし} \\ a+b \neq 0 \text{ かつ } a \neq b \text{ のとき} & x = \frac{a+b}{a-b} \end{cases}$

$$\star a = b \text{ かつ } a+b \neq 0 \text{ のとき}$$

$$a+b = 2a \text{ であるから, } a \neq 0$$

$$\text{また, } a+b = 0 \Leftrightarrow a = -b$$

\therefore 別解 $\begin{cases} a = -b \text{ のとき} & x \text{ は全ての实数} \\ a = b \neq 0 \text{ のとき} & x \text{ は解なし} \\ a \neq \pm b \text{ のとき} & x = \frac{a+b}{a-b} \end{cases}$

2. a, b, x は実数である. 次の方程式を x について解け. (S 級 2 分 30 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 9 分)

(1) $3a(x+1) = 6$

$$\Leftrightarrow a(x+1) = 2$$

$$\Leftrightarrow ax = 2 - a$$

$$\begin{cases} a = 0 \text{ のとき} & 0x = 2 \Leftrightarrow x \text{ は解なし} \\ a \neq 0 \text{ のとき} & ax = 2 - a \Leftrightarrow x = \frac{2-a}{a} \end{cases}$$

答え $\begin{cases} a = 0 \text{ のとき} & x \text{ は解なし} \\ a \neq 0 \text{ のとき} & x = \frac{2-a}{a} \end{cases}$

(2) $a(x+1) = 3 - 2x$

$$\Leftrightarrow (a+2)x = 3 - a$$

$a+2=0 \Leftrightarrow a=-2$ であるから,

$$\begin{cases} a+2=0 \text{ のとき} & 0x = 3 - (-2) \Leftrightarrow x \text{ は解なし} \\ a+2 \neq 0 \text{ のとき} & (a+2)x = 3 - a \Leftrightarrow x = \frac{3-a}{a+2} \end{cases}$$

答え $\begin{cases} a = -2 \text{ のとき} & x \text{ は解なし} \\ a \neq -2 \text{ のとき} & x = \frac{3-a}{a+2} \end{cases}$

(3) $ax - b = bx - a$

$$\Leftrightarrow (a-b)x = -(a-b)$$

$$\begin{cases} a-b=0 \text{ のとき} & 0x = 0 \Leftrightarrow x \text{ は全ての実数} \\ a-b \neq 0 \text{ のとき} & (a-b)x = -(a-b) \Leftrightarrow x = -1 \end{cases}$$

答え $\begin{cases} a = b \text{ のとき} & x \text{ は全ての実数} \\ a \neq b \text{ のとき} & x = -1 \end{cases}$

(4) $a^2(x-1) = b^2x + ab$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)x = a^2 + ab$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)x = a(a+b)$$

$a+b=0$ のとき

$$0x = 0 \Leftrightarrow x \text{ は全ての実数}$$

$a+b \neq 0$ かつ $a-b=0$ のとき $0x = a(a+b)$

$$a=0 \text{ のとき} \quad 0x = 0 \Leftrightarrow x \text{ は全ての実数}$$

しかし, $a-b=0$ より, $a=b=0$ であるから,

$a+b \neq 0$ に反するので不適当

よって, $a \neq 0$ となり $0x = a(a+b) \Leftrightarrow x$ は解なし

$a+b \neq 0$ かつ $a-b \neq 0$ のとき

$$(a+b)(a-b)x = a(a+b)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)x = a$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a}{a-b}$$

答え $\begin{cases} a+b=0 \text{ のとき} & x \text{ は全ての実数} \\ a+b \neq 0 \text{ かつ } a=b \text{ のとき} & x \text{ は解なし} \\ a+b \neq 0 \text{ かつ } a \neq b \text{ のとき} & x = \frac{a}{a-b} \end{cases}$

☆ $a=b$ かつ $a+b \neq 0$ のとき

$$a+b=2a \text{ であるから, } a \neq 0$$

$$\text{また, } a+b=0 \Leftrightarrow a=-b$$

∴ 別解 $\begin{cases} a = -b \text{ のとき} & x \text{ は全ての実数} \\ a = b \neq 0 \text{ のとき} & x \text{ は解なし} \\ a \neq \pm b \text{ のとき} & x = \frac{a}{a-b} \end{cases}$