

反射テスト 1次方程式 文字定数 場合分け 01

1. a, b, x は実数である. 次の方程式を x について解け. (S 級 45 秒, A 級 1 分 20 秒, B 級 2 分 20 秒, C 級 3 分 30 秒)

(1) $1x = 1$

(2) $1x = 0$

(3) $0x = 1$

(4) $0x = 0$

(5) $ax = 1$

(6) $ax = b$

2. a, b, x は実数である. 次の方程式を x について解け. (S 級 1 分 50 秒, A 級 3 分, B 級 4 分 20 秒, C 級 6 分)

(1) $ax = a$

(2) $2ax = 2a - 4$

(3) $ax + 3 = 2x + b$

(4) $a^2x + a + 2 = x + a^2$

反射テスト 1次方程式 文字定数 場合分け 01 解答解説

1. a, b, x は実数である. 次の方程式を x について解け. (S級 45 秒, A級 1分 20 秒, B級 2分 20 秒, C級 3分 30 秒)

★1次方程式 $ax = b$

方程式 $ax = b$ を x について解く場合, 両辺 $\div a$ をしなければならない.

しかし, $a = 0$ のときは, 両辺を 0 で割ることになるため, 矛盾を導く.

よって, 「 $a = 0$ のとき」と, 「 $a \neq 0$ のとき」に場合分けをする必要がある.

(1) $1x = 1$

$\Leftrightarrow x = 1$

(2) $1x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

(3) $0x = 1$

$\Leftrightarrow x$ は解なし

(4) $0x = 0$

$\Leftrightarrow x$ は全ての实数

(5) $ax = 1$

$a = 0$ のとき $0x = 1$

$\Leftrightarrow x$ は解なし

$a \neq 0$ のとき $ax = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{a}$

答え $\begin{cases} a = 0 \text{ のとき} & x \text{ は解なし} \\ a \neq 0 \text{ のとき} & x = \frac{1}{a} \end{cases}$

☆ポイント

両辺を文字式で割るときは, 0 で割る可能性を考える.

\Rightarrow 「 0 のとき」と「 0 ではないとき」で場合分け

(6) $ax = b$

$a = 0$ のとき $0x = b$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \text{ のとき} & 0x = 0 \Leftrightarrow x \text{ は全ての实数} \\ b \neq 0 \text{ のとき} & 0x = b \Leftrightarrow x \text{ は解なし} \end{cases}$

$a \neq 0$ のとき $ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$

答え $\begin{cases} a = b = 0 \text{ のとき} & x \text{ は全ての实数} \\ a = 0 \text{ かつ } b \neq 0 \text{ のとき} & x \text{ は解なし} \\ a \neq 0 \text{ のとき} & x = \frac{b}{a} \end{cases}$

☆ポイント

$0x = (\text{文字式})$ の形の場合, 右辺 $= 0$ の可能性を考える.

\Rightarrow 「 0 のとき」と「 0 ではないとき」で場合分け

2. a, b, x は実数である. 次の方程式を x について解け. (S 級 1 分 50 秒, A 級 3 分, B 級 4 分 20 秒, C 級 6 分)

(1) $ax = a$

$a = 0$ のとき

$0x = 0 \Leftrightarrow x$ は全ての实数

$a \neq 0$ のとき

$ax = a \Leftrightarrow x = 1$

答え $\begin{cases} a = 0 \text{ のとき} & x \text{ は全ての实数} \\ a \neq 0 \text{ のとき} & x = 1 \end{cases}$

(2) $2ax = 2a - 4$

両辺 $\div 2$ より $ax = a - 2$

$$\begin{cases} a = 0 \text{ のとき} & 0x = -2 \Leftrightarrow x \text{ は解なし} \\ a \neq 0 \text{ のとき} & ax = a - 2 \Leftrightarrow x = \frac{a-2}{a} \end{cases}$$

答え $\begin{cases} a = 0 \text{ のとき} & x \text{ は解なし} \\ a \neq 0 \text{ のとき} & x = \frac{a-2}{a} \end{cases}$

(3) $ax + 3 = 2x + b$

左辺に x の項を, 右辺に x のない項を移項する.

$$ax - 2x = b - 3 \Leftrightarrow (a - 2)x = b - 3$$

場合分けの条件について考える.

左辺の x の係数が 0 になるとき $a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$

右辺が 0 になるとき $b - 3 = 0 \Leftrightarrow b = 3$

$a = 2$ のとき

$$0x = b - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \text{ のとき} & 0x = 0 \Leftrightarrow x \text{ は全ての实数} \\ b \neq 3 \text{ のとき} & 0x = b - 3 \Leftrightarrow x \text{ は解なし} \end{cases}$$

$a \neq 2$ のとき

$$(a - 2)x = b - 3 \Leftrightarrow x = \frac{b-3}{a-2}$$

答え $\begin{cases} a = 2 \text{ かつ } b = 3 \text{ のとき} & x \text{ は全ての实数} \\ a = 2 \text{ かつ } b \neq 3 \text{ のとき} & x \text{ は解なし} \\ a \neq 2 \text{ のとき} & x = \frac{b-3}{a-2} \end{cases}$

(4) $a^2x + a + 2 = x + a^2$

左辺に x の項を, 右辺に x のない項を移項する.

$$a^2x - x = a^2 - a - 2$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 1)x = a^2 - a - 2$$

$$\Leftrightarrow (a + 1)(a - 1)x = (a + 1)(a - 2)$$

複雑な場合分けなので, ここで「 $0x = \sim$ 」の形もありうることを確かめた上で, 場合分けの条件について考える.

左辺について

$$(a + 1)(a - 1) = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ または } a = -1$$

右辺について

$$(a + 1)(a - 2) = 0 \Leftrightarrow a = 2 \text{ または } a = -1$$

$a = 1$ のとき, 左辺だけが 0

$a = -1$ のとき, 左辺も右辺も 0

($a = 2$ のとき, 右辺だけが 0 になるが, これは考える必要がない.)

$a = -1$ のとき

$$0x = 0 \Leftrightarrow x \text{ は全ての实数}$$

$a = 1$ のとき

$$0x = (1 + 1)(1 - 2) \Leftrightarrow 0x = -2 \Leftrightarrow x \text{ は解なし}$$

$a \neq -1$ かつ $a \neq 1$ のとき

$$(a + 1)(a - 1)x = (a + 1)(a - 2)$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)x = (a - 2) \Leftrightarrow x = \frac{a-2}{a-1}$$

答え $\begin{cases} a = -1 \text{ のとき} & x \text{ は全ての实数} \\ a = 1 \text{ のとき} & x \text{ は解なし} \\ a \neq -1 \text{ かつ } a \neq 1 \text{ のとき} & x = \frac{a-2}{a-1} \end{cases}$