反射テスト　平方根　平方と整数　02

1.　次の問に答えよ. 答えは全て求めよ.（ S 級 1 分 30 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

（1）　$\sqrt{\dfrac{180}{n}}$ が自然数であるとき, 自然数 n を求めよ.

（2）　$\sqrt{n^2+32}$ が自然数であるとき, 自然数 n を求めよ.

2.　次の問に答えよ. 答えは全て求めよ. (S 級 1 分 30 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分)

(1)　$\sqrt{\dfrac{600}{n}}$ が自然数であるとき, 自然数 n を求めよ.

(2)　$\sqrt{n^2+105}$ が自然数であるとき, 自然数 n を求めよ.

反射テスト　平方根　平方と整数　02　解答解説

1.　次の問に答えよ. 答えは全て求めよ.（ S 級 1 分, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

★ 整数問題は因数分解　素因数分解と因数分解は一緒.

（1）　$\sqrt{\dfrac{180}{n}}$ が自然数であるとき, 自然数 n を求めよ.

☆「反射テスト・平方根・平方と整数・01」の類題だが, 数字が大きいため、同じ解法では大変.
★ 整数問題は因数分解　素因数分解と因数分解は一緒.
自然数 m を用いて, $\sqrt{\dfrac{180}{n}}$ を m とする.

$\sqrt{\dfrac{180}{n}} = m$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{180}{n} = m^2$ ここで, 180 の素因数分解を考える.

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

★ 平方数 m^2 は素因数分解したときの 指数が全て偶数.
よって, 可能性があるのは, $m = 1, 2^2, 3^2, (2\times 3)^2$

$$\therefore \begin{cases} \frac{180}{n} = 1 & \Leftrightarrow \quad n = 180 \\ \frac{180}{n} = 2^2 & \Leftrightarrow \quad n = 45 \\ \frac{180}{n} = 3^2 & \Leftrightarrow \quad n = 20 \\ \frac{180}{n} = 6^2 & \Leftrightarrow \quad n = 5 \end{cases} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{n = 5, 20, 45, 180}$$

（2）　$\sqrt{n^2+32}$ が自然数であるとき, 自然数 n を求めよ.

自然数 m を用いて, $\sqrt{n^2+32}$ を m とする.

$\sqrt{n^2+32} = m$　（ m は自然数 ）

$\Rightarrow \quad n^2 + 32 = m^2$　←両辺の 2 乗

$\Leftrightarrow \quad 32 = m^2 - n^2$

$\Leftrightarrow \quad 32 = (m+n)(m-n)$　←★ 整数問題は因数分解

$m+n > m-n$ であるから, 32 の約数を考えて表を作る.

$m-n$	1	2	4
$m+n$	32	16	8

連立方程式を解く.

$m-n=1$ かつ $m+n=32 \quad \Leftrightarrow \quad m=\frac{33}{2}$ かつ $n=\frac{31}{2}$

$m-n=2$ かつ $m+n=16 \quad \Leftrightarrow \quad m=9$ かつ $n=7$

$m-n=4$ かつ $m+n=8 \quad \Leftrightarrow \quad m=6$ かつ $n=2$

n は自然数であるから, $\boldsymbol{n = 2, 7}$

2. 次の問に答えよ. 答えは全て求めよ.（ S 級 1 分 30 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

★ **整数問題は因数分解**　素因数分解と因数分解は一緒.

(1) $\sqrt{\dfrac{600}{n}}$ が自然数であるとき, 自然数 n を求めよ.

☆「反射テスト・平方根・平方と整数・01」の類題だが, 数字が大きいため、同じ解法では大変.

★ **整数問題は因数分解**　素因数分解と因数分解は一緒.

自然数 m を用いて, $\sqrt{\dfrac{600}{n}}$ を m とする.

$$\sqrt{\frac{600}{n}} = m$$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{600}{n} = m^2$ ここで, 600 の素因数分解を考える.

$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$

★ **平方数** m^2 は素因数分解したときの **指数が全て偶数.**

よって, 可能性があるのは, $m = 1, 2^2, 5^2, (2 \times 5)^2$

$$\therefore \begin{cases} \frac{600}{n} = 1 & \Leftrightarrow \quad n = 600 \\ \frac{600}{n} = 2^2 & \Leftrightarrow \quad n = 150 \\ \frac{600}{n} = 5^2 & \Leftrightarrow \quad n = 24 \\ \frac{600}{n} = 10^2 & \Leftrightarrow \quad n = 6 \end{cases} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{n = 6, 24, 150, 600}$$

(2) $\sqrt{n^2 + 105}$ が自然数であるとき, 自然数 n を求めよ.

自然数 m を用いて, $\sqrt{n^2 + 105}$ を m とする.

$\sqrt{n^2 + 105} = m$　（ m は自然数 ）

$\Rightarrow$ $n^2 + 105 = m^2$　←両辺の 2 乗

$\Leftrightarrow$ $105 = m^2 - n^2$

$\Leftrightarrow$ $105 = (m+n)(m-n)$　←★ **整数問題は因数分解**

$m + n > m - n$ であるから, 105 の約数を考えて表を作る.

$m-n$	1	3	5	7
$m+n$	105	35	21	15

連立方程式を解く.

$m - n = 1$ かつ $m + n = 105$ $\Leftrightarrow$ $m = 53$ かつ $n = 52$

$m - n = 3$ かつ $m + n = 35$ $\Leftrightarrow$ $m = 19$ かつ $n = 16$

$m - n = 5$ かつ $m + n = 21$ $\Leftrightarrow$ $m = 13$ かつ $n = 8$

$m - n = 7$ かつ $m + n = 15$ $\Leftrightarrow$ $m = 11$ かつ $n = 4$

n は自然数であるから, $\boldsymbol{n = 4, 8, 16, 52}$