反射テスト　平方根　平方と整数　平方数は偶数乗　01

1. 次の問に答えよ.（ S 級 20 秒, A 級 1 分, B 級 2 分 30 秒, C 級 4 分 ）

（1） $\sqrt{45n}$ が自然数となる最小の自然数 n を求めよ.

（2） $\sqrt{120n}$ が自然数となるような, 自然数 n のうち 4 番目に小さい n を求めよ.

2. 次の問に答えよ.（ S 級 20 秒, A 級 1 分, B 級 2 分 30 秒, C 級 4 分 ）

（1） $\sqrt{56n}$ が自然数となる最小の自然数 n を求めよ.

（2） $\sqrt{216n}$ が自然数となるような, 自然数 n のうち 5 番目に小さい n を求めよ.

反射テスト　平方根　平方と整数　平方数は偶数乗　01　解答解説

1.　次の問に答えよ.（ S 級 20 秒, A 級 1 分, B 級 2 分 30 秒, C 級 4 分 ）

(1)　$\sqrt{45n}$ が自然数となる最小の自然数 n を求めよ.

$\sqrt{45n} = 3\sqrt{5n}$　⇒　$\sqrt{5n}$ も整数.

$\sqrt{5n} = m$　（ m は自然数 ）

⇒　$5n = m^2$

⇔　$n = \dfrac{m^2}{5}$

m は素因数 5 をもたなければいけないので,

$n = \dfrac{(5\times1)^2}{5}$, $\dfrac{(5\times2)^2}{5}$, $\dfrac{(5\times3)^2}{5}$, $\cdots$

$= 5\times1^2$, 5×2^2 , 5×3^2 , $\cdots$

$= 5, 20, 45, \cdots$　⇒　最小の n は **5**

★ 平方数は偶数乗

「$\sqrt{An}$ が自然数となるような n を求めよ.」という問題の早い解き方

①　$a\sqrt{A'n}$ の形にする.（ $\sqrt{A}$のルート内を簡単にして, 外に出せるものは出してしまう.）

②　$n = A'\times1^2$, $A'\times2^2$, $A'\times3^2$, $\cdots$

n が②の形になれば, $\sqrt{A'n}$ のルート内が自然数の偶数乗で表せることになる.

(1) に適用すると,

①　$\sqrt{45n} = 3\sqrt{5n}$

②　最小だから, $n = 5\times\mathbf{1}^2 = \mathbf{5}$

(2)　$\sqrt{120n}$ が自然数となるような, 自然数 n のうち 4 番目に小さい n を求めよ.

$\sqrt{120n} = 2\sqrt{30n}$　⇒　$\sqrt{30n}$ も自然数.

$\sqrt{30n} = m$　（ m は自然数 ）

⇒　$30n = m^2$

⇔　$n = \dfrac{m^2}{30}$

⇔　$n = \dfrac{m^2}{2\times3\times5}$

m は素因数 $2, 3, 5$ をもたなければいけないので,

$n = \dfrac{(30\times1)^2}{30}$, $\dfrac{(30\times2)^2}{30}$, $\dfrac{(30\times3)^2}{30}$, $\cdots$

$= 30\times1^2$, 30×2^2 , 30×3^2 , 30×4^2 , $\cdots$

$= 30, 120, 270, 480, \cdots$　⇒　4 番目の n は **480**

☆別解　(1) の★の方法を使うと,

①　$\sqrt{120n} = 2\sqrt{30n}$

②　**4** 番目だから, $n = 30\times\mathbf{4}^2 = \mathbf{480}$

2.　次の問に答えよ.（ S 級 20 秒, A 級 1 分, B 級 2 分 30 秒, C 級 4 分 ）

（1）　$\sqrt{56n}$ が自然数となる最小の自然数 n を求めよ.

$\sqrt{56n} = 2\sqrt{14n}$　$\Rightarrow$　$\sqrt{14n}$ も整数.

$\sqrt{14n} = m$　　（ m は自然数 ）
$\Rightarrow$　$14n = m^2$
$\Leftrightarrow$　$n = \dfrac{m^2}{14}$
$\Leftrightarrow$　$n = \dfrac{m^2}{2 \times 7}$

m は素因数 $2, 7$ をもたなければいけないので,
$n = \dfrac{(14 \times 1)^2}{14}$, $\dfrac{(14 \times 2)^2}{14}$, $\dfrac{(14 \times 3)^2}{14}$, $\cdots$
$= 14 \times 1^2$, 14×2^2 , 14×3^2 , $\cdots$
$= 14, 56, 126, \cdots$　　$\Rightarrow$　最小の n は **14**

★ 平方数は偶数乗
「$\sqrt{An}$ が自然数となるような n を求めよ.」という問題の早い解き方
①　$a\sqrt{A'n}$ の形にする.（ $\sqrt{A}$のルート内を簡単にして, 外に出せるものは出してしまう.）
②　$n = A' \times 1^2$, $A' \times 2^2$, $A' \times 3^2$, $\cdots$
n が②の形になれば, $\sqrt{A'n}$ のルート内が自然数の偶数乗で表せることになる.

(1) に適用すると,
①　$\sqrt{56n} = 2\sqrt{14n}$
②　最小だから, $n = 14 \times \mathbf{1}^2 = \mathbf{14}$

（2）　$\sqrt{216n}$ が自然数となるような, 自然数 n のうち 5 番目に小さい n を求めよ.

$\sqrt{216n} = 6\sqrt{6n}$　$\Rightarrow$　$\sqrt{6n}$ も自然数.

$\sqrt{6n} = m$　　（ m は自然数 ）
$\Rightarrow$　$6n = m^2$
$\Leftrightarrow$　$n = \dfrac{m^2}{6}$
$\Leftrightarrow$　$n = \dfrac{m^2}{2 \times 3}$

m は素因数 $2, 3$ をもたなければいけないので,
$n = \dfrac{(6 \times 1)^2}{6}$, $\dfrac{(6 \times 2)^2}{6}$, $\dfrac{(6 \times 3)^2}{6}$, $\cdots$
$= 6 \times 1^2$, 6×2^2 , 6×3^2 , 6×4^2 , 6×5^2 , $\cdots$
$= 6, 24, 54, 96, 150, \cdots$　　$\Rightarrow$　5 番目の n は **150**

☆別解　(1) の★の方法を使うと,
①　$\sqrt{216n} = 6\sqrt{6n}$
②　**5** 番目だから, $n = 6 \times \mathbf{5}^2 = \mathbf{150}$