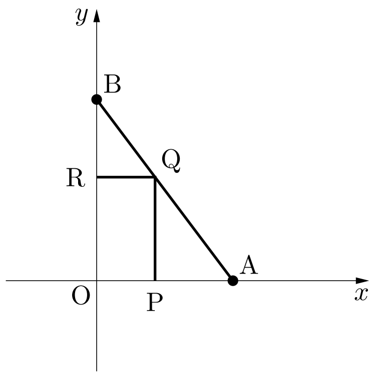
反射テスト　幾何と解析　別解の発見　01

1. 点 $\mathrm{A}(6,0), \mathrm{B}(0,8)$ がある．点 Q は線分 AB 上にあって，そこから x, y 軸それぞれに垂線を下ろし，その足をそれぞれ点 P, Q とする．（ S 級 1 分，A 級 2 分，B 級 3 分 20 秒，C 級 5 分 ）

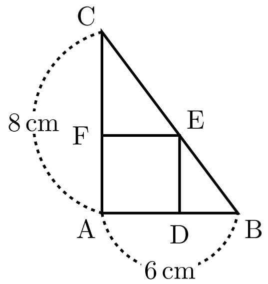
(1)　線分 AB の方程式を求めよ．

(2)　四角形 OPQR が正方形になるとき点 Q の座標を求めよ．



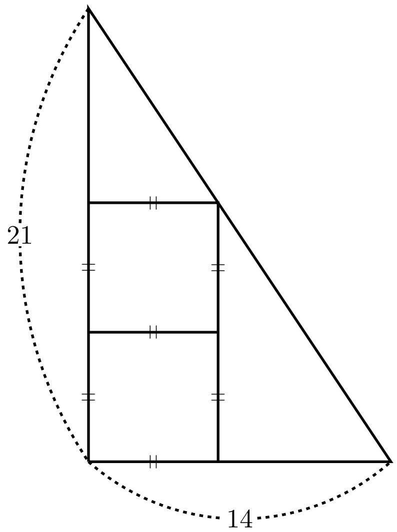
2. 次の図で，ADEF は正方形である．$\mathrm{AB} = 6\,\mathrm{cm}$，$\mathrm{AC} = 8\,\mathrm{cm}$ であるとき，正方形の一辺の長さを求めよ．

（ S 級 30 秒，A 級 1 分，B 級 2 分，C 級 3 分 ）



ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

3. 直角三角形があり，その内部に図のように正方形が 2 つある．正方形の一辺の長さを求めよ．
ただし，幾何的解法と解析的解法の 2 種類で解くこと．　（ S 級 2 分，A 級 3 分 20 秒，B 級 5 分，C 級 7 分 ）



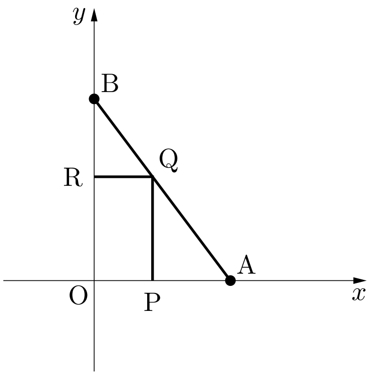
ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

反射テスト　幾何と解析　別解の発見　01　解答解説

1. 点 A$(6,0)$, B$(0,8)$ がある．点 Q は線分 AB 上にあって，そこから x, y 軸それぞれに垂線を下ろし，その足をそれぞれ点 P, Q とする．(S 級 1 分，A 級 2 分，B 級 3 分 20 秒，C 級 5 分)

(1)　線分 AB の方程式を求めよ．

(2)　四角形 OPQR が正方形になるとき点 Q の座標を求めよ．



(1)　**★求めるものに名前をつける.**

求める直線 AB の方程式を $y = ax + b$ とおくと，

A$(6,0)$ を通るから　$0 = 6a + b$　　B$(0,8)$ を通るから　$8 = b$

この連立方程式を解いて　$a = -\dfrac{4}{3}, b = 8$

∴ 求めるものは **線分** であるから　$\boldsymbol{y = -\dfrac{4}{3}x + 8 \quad (0 \leqq x \leqq 6)}$

(2)　**★求めるものに名前をつける.**　⇒　Q(p, q) とおく．

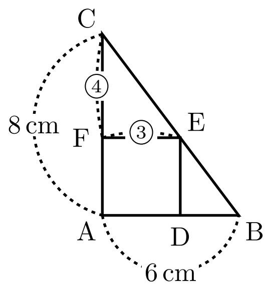
Q は $y = -\dfrac{4}{3}x + 8$ 上にあるので，　$q = -\dfrac{4}{3}p + 8$　　…①

正方形の条件は　OP = OR　⇒　$p = q$　　…②

①と②の連立方程式を解く．　⇒　Q$\boldsymbol{\left(\dfrac{24}{7}, \dfrac{24}{7}\right)}$

2. 次の図で，ADEF は正方形である．AB = 6 cm，AC = 8 cm であるとき，正方形の一辺の長さを求めよ．

(S 級 30 秒，A 級 1 分，B 級 2 分，C 級 3 分)



★図形の基本は三角形.

求めたい長さは AD, DE, EF, FA のいずれか．

EF を一辺とする三角形 CFE に注目　(☆別に △EDB もよい)

これは △CAB と相似だから，左辺と下辺の比は　$8 : 6 = 4 : 3$

⇒　CF = ④，FE = ③

⇒　CA = CF + FA = CF + FE = ④ + ③ = ⑦

よって　⑦ = 8cm　⇔　① = $\dfrac{8}{7}$ cm

FE = ③ = $\dfrac{8}{7} \times 3 = \boldsymbol{\dfrac{24}{7}}$ **cm**

★ 幾何と解析

大問 1 と 2 は結果的に同じ問題である．難しい図形問題も座標で考えると解けることがあることを覚えておこう．

一般的に，「幾何」は閃きが必要だか計算は楽．「解析」は解法を見つけやすいが計算は面倒．

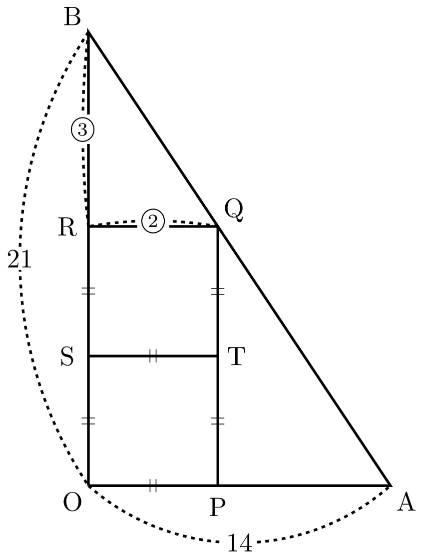
幾何 (*geometry*)　図形や空間の性質を考える数学の分野．

解析 (*analysis*)　関数・極限などの概念を扱う数学の分野．

厳密にいえば，座標を用いて考えることも幾何学の範疇に入るが，この反射テストでは座標を用いて解くことを解析的とした．

ⓒ 数学・算数を楽しむために (http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html)

3. 直角三角形があり，その内部に図のように正方形が２つある．正方形の一辺の長さを求めよ．
ただし，幾何的解法と解析的解法の２種類で解くこと．　　　　　　　（ S 級２分，A 級３分 20 秒，B 級５分，C 級７分 ）



☆幾何的解法

★図形の基本は三角形.

求めたい長さ RQ を一辺とする三角形 BRQ に注目

これは △BOA と相似

⇒　左辺と下辺の比は　21 : 14 = 3 : 2

⇒　BR = ③，RQ = ②

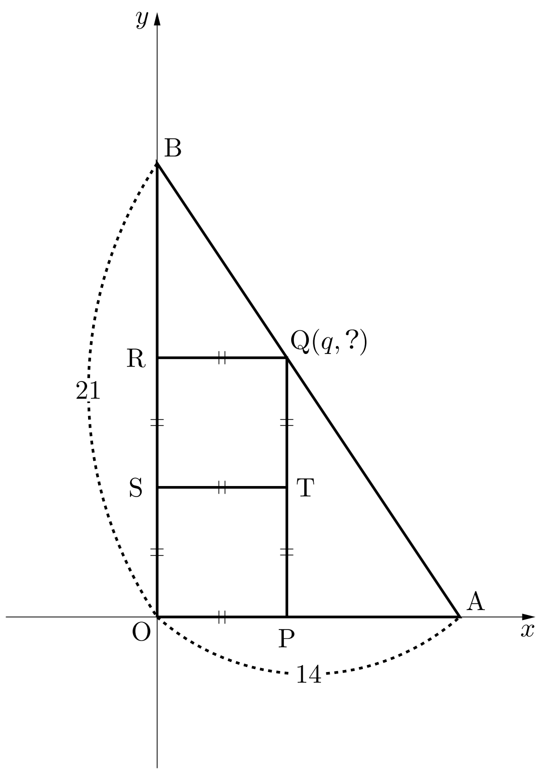
⇒　RS = SO = ②

⇒　BO = BR + RS + SO

　　　= ③ + ② + ② = ⑦

よって　⑦ = 21　⇔　① = 3

RQ = ② = 3 × 2 = **6**



☆解析的解法

★命名　知りたいこと・求めたいことに名前をつける.

★知りたい点の x 座標を文字でおく.

Q の x 座標を q とする．

直線 AB の方程式 $y = ax + b$ とおく．

点 A$(14, 0)$, B$(0, 21)$ を代入して，

$0 = 14a + b$　かつ　$21 = b$

⇒　$a = -\dfrac{3}{2}$ かつ $b = 21$

よって，Q $\left(q, -\dfrac{3}{2}q + 21\right)$

QR : QP = 1 : 2

⇒　$(q - 0) : \left(-\dfrac{3}{2}q + 21 - 0\right) = 1 : 2$

⇔　$2q = 1\left(21 - \dfrac{3}{2}q\right)$

⇔　$2q = 21 - \dfrac{3}{2}q$

⇔　$q = 6$

よって　RQ $= q - 0 = \mathbf{6}$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）