

反射テスト 2次方程式 入試問題 応用 難 01

1. x の2次方程式 $ax^2 + x - 6 = 0$ は異符号の2つの解をもち、その絶対値は一方がもう一方の2倍である。このとき a の値を求めよ。
(S級2分, A級4分, B級7分, C級10分)

2. x の 2 次方程式 $ax^2 + x - 6 = 0$ は異符号の 2 つの解をもち、その解の絶対値の比は 3 : 4 である. このとき a の値を求めよ.
(S 級 2 分, A 級 4 分, B 級 7 分, C 級 10 分)

反射テスト 2次方程式 入試問題 応用 難 01 解答解説

1. x の2次方程式 $ax^2 + x - 6 = 0$ は異符号の2つの解をもち、その絶対値は一方がもう一方の2倍である。このとき a の値を求めよ。
(S級2分, A級4分, B級7分, C級10分)

異符号の2つの解は、絶対値の比が1:2であるから、 $x = -t, 2t$ とおいてよい。 ←☆ t が負であれば $2t$ の方が負になる。

$$x = -t \text{ 又は } x = 2t$$

$$\Leftrightarrow x + t = 0 \text{ 又は } x - 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + t)(x - 2t) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - tx - 2t^2 = 0$$

この方程式を解くことと、元の $ax^2 + x - 6 = 0$ を解くことが同じになればよい。

よって、 x^2 の係数を合わせるために、 $x^2 - tx - 2t^2 = 0$ の両辺を a 倍すると、

$$ax^2 - atx - 2at^2 = 0$$

$$\text{元の2次方程式の係数を比較して、} \quad -at = 1 \quad \text{かつ} \quad -2at^2 = -6 \quad \Leftrightarrow \quad at = -1 \quad \text{かつ} \quad at \times t = 3$$

$$at = -1 \text{ をもう一方に代入して、} \quad -t = 3 \quad \Leftrightarrow \quad t = -3$$

$$\therefore at = -1 \Rightarrow -3a = -1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$$

ちなみに解は、 $x = -t, 2t$ より、 $x = 3, -6$

☆補足 「 t が負であれば $2t$ の方が負になる。」

逆もあるのではないか。つまり「 $x = t$ 又は $x = -2t$ 」という解もあるのではないかという疑問は自然である。

このような疑問に遭遇したら、実際に解くのが一番である。

$$x = t \text{ 又は } x = -2t \Leftrightarrow (x - t)(x + 2t) = 0 \Leftrightarrow x^2 + tx - 2t^2 = 0 \Leftrightarrow ax^2 + atx - 2at^2 = 0$$

よって $at = 1$ かつ $-2at^2 = -6$ となり、上と同じように解くと、 $t = 3$ かつ $a = \frac{1}{3}$ 。

つまり、 a の値は同じになるし、解 $x = t, -2t$ も、 $t = 3$ より、 $x = 3, -6$ となって上と同じ結果になる。

よって、どちらか一方を考えればよいことになる。

2. x の 2 次方程式 $ax^2 + x - 6 = 0$ は異符号の 2 つの解をもち、その解の絶対値の比は 3 : 4 である。このとき a の値を求めよ。
(S 級 2 分, A 級 4 分, B 級 7 分, C 級 10 分)

異符号の 2 つの解は、絶対値の比が 3 : 4 であるから、 $x = -3t, 4t$ とおいてよい。 ← ☆ t が負であれば $4t$ の方が負になる。

$$x = -3t \text{ 又は } x = 4t$$

$$\Leftrightarrow x + 3t = 0 \text{ 又は } x - 4t = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 3t)(x - 4t) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - tx - 12t^2 = 0$$

この方程式を解くことと、元の $ax^2 + x - 6 = 0$ を解くことが同じになればよい。

よって、 x^2 の係数を合わせるために、 $x^2 - tx - 12t^2 = 0$ の両辺を a 倍すると、

$$ax^2 - atx - 12at^2 = 0$$

$$\text{係数を比較して, } -at = 1 \text{ かつ } -12at^2 = -6 \quad \Leftrightarrow \quad at = -1 \text{ かつ } at \times t = -\frac{1}{2}$$

$$at = -1 \text{ をもう一方に代入して, } -t = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{2}$$

$$\therefore at = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2$$