反射テスト　2次方程式　入試問題　応用　04

1.　次の問に答えよ.（ S 級 1 分, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 8 分 ）

(1)　p, q を整数とする. x の 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ を解くと, 解の 1 つが $x = 1 + \sqrt{5}$ であった. p, q を求めよ.

(2)　2 次方程式 $(x-1)^2 = 2$ の 2 つの解を a, b $(a > b)$ とするとき, $(a + 2b - 3)^2$ の値を求めよ.

2.　次の問に答えよ.（ S 級 1 分, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 8 分 ）

(1)　p, q を整数とする. x の 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ を解くと, 解の 1 つが $x = \dfrac{7 + \sqrt{57}}{2}$ であった. p, q を求めよ.

(2)　2 次方程式 $(x-1)^2 = 3$ の 2 つの解を a, b $(a > b)$ とするとき, $(3a - 2b - 1)^2$ の値を求めよ.

反射テスト　２次方程式　入試問題　応用　04　解答解説

1.　次の問に答えよ.（ S 級 1 分, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 8 分 ）

(1)　p, q を整数とする. x の 2 次方程式 $x^2+px+q=0$ を解くと, 解の 1 つが $x=1+\sqrt{5}$ であった. p, q を求めよ.

★整数係数の 2 次方程式
解の 1 つが $x=a+\sqrt{b}$ ならば, もう 1 つの解は $x=a-\sqrt{b}$　　ただし, $\sqrt{b}$ は無理数

もう 1 つの解は　$x=1-\sqrt{5}$ であるから,

★解と係数の関係から,

$$p=-\left(1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}\right)=-2$$

$$q=\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)=1^2-\sqrt{5}^2=1-5=-4$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{p=-2\ ,\ q=-4}$$

☆別解
$x=1+\sqrt{5}$ を代入して,
　$(1+\sqrt{5})^2+p(1+\sqrt{5})+q=0 \quad\Leftrightarrow\quad (6+p+q)+(2+p)\sqrt{5}=0$
よって　$6+p+q=0$　かつ　$2+p=0$　$\Leftrightarrow$　**$p=-2$ かつ $q=-4$**

★有理数と無理数　有理数 a, b に対して, $a+b\sqrt{2}=0$ ならば, $a=0$ かつ $b=0$.

(2)　2 次方程式 $(x-1)^2=2$ の 2 つの解を $a, b\ (a>b)$ とするとき, $(a+2b-3)^2$ の値を求めよ.

$$(x-1)^2=2 \quad\Leftrightarrow\quad x-1=\pm\sqrt{2} \quad\Leftrightarrow\quad x=1\pm\sqrt{2}$$

よって　$a=1+\sqrt{2}$　かつ　$b=1-\sqrt{2}$

$$(a+2b-3)^2=\left\{\left(1+\sqrt{2}\right)+2\left(1-\sqrt{2}\right)-3\right\}^2$$

$$=\left(1+\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}-3\right)^2$$

$$=\left(-\sqrt{2}\right)^2=\boldsymbol{2}$$

☆ポイント　$(a+2b-3)^2$ が対称式ではないので, ★解と係数の関係を利用するメリットがほとんどない.

2. 次の問に答えよ.（ S 級 1 分, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 8 分 ）

(1) p, q を整数とする. x の 2 次方程式 $x^2+px+q=0$ を解くと, 解の 1 つが $x=\dfrac{7+\sqrt{57}}{2}$ であった. p, q を求めよ.

★整数係数の 2 次方程式
解の 1 つが $x=a+\sqrt{b}$ ならば, もう 1 つの解は $x=a-\sqrt{b}$ 　ただし, $\sqrt{b}$ は無理数

もう 1 つの解は $x=\dfrac{7-\sqrt{57}}{2}$ であるから,

★解と係数の関係から,

$$p=-\left(\frac{7+\sqrt{57}}{2}+\frac{7-\sqrt{57}}{2}\right)=-7$$

$$q=\frac{7+\sqrt{57}}{2}\times\frac{7-\sqrt{57}}{2}=\frac{7^2-\sqrt{57}^2}{4}=\frac{49-57}{4}=-2$$

$\therefore$ $\boldsymbol{p=-7}$ **,** $\boldsymbol{q=-2}$

☆別解
$x=\dfrac{7-\sqrt{57}}{2}$ を代入して,

$$\left(\frac{7-\sqrt{57}}{2}\right)^2+p\left(\frac{7-\sqrt{57}}{2}\right)+q=0 \quad\Leftrightarrow\quad (53+7p+2q)+(7+p)\sqrt{57}=0$$

よって $53+7p+2q=0$ かつ $7+p=0$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{p=-7}$ **かつ** $\boldsymbol{q=-2}$

★有理数と無理数 　有理数 a, b に対して, $a+b\sqrt{2}=0$ ならば, $a=0$ かつ $b=0$.

(2) 2 次方程式 $(x-1)^2=3$ の 2 つの解を a, b $(a>b)$ とするとき, $(3a-2b-1)^2$ の値を求めよ.

$$(x-1)^2=3 \quad\Leftrightarrow\quad x-1=\pm\sqrt{3} \quad\Leftrightarrow\quad x=1\pm\sqrt{3}$$

よって $a=1+\sqrt{3}$ かつ $b=1-\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}(3a-2b-1)^2&=\left\{3\left(1+\sqrt{3}\right)-2\left(1-\sqrt{3}\right)-1\right\}^2\\&=\left(3+3\sqrt{3}-2+2\sqrt{3}-1\right)^2\\&=\left(5\sqrt{3}\right)^2=\mathbf{75}\end{aligned}$$

☆ポイント 　$(3a-2b-1)^2$ が対称式ではないので, ★解と係数の関係を利用するメリットがほとんどない.