反射テスト　2次方程式　逆算　02

1.　実数 a に対して，2次方程式 $x^2 - 2ax + 4 = 0$ の解の1つが $x = 1 + \sqrt{5}$ であった．

（ S 級1分40秒，A 級2分45秒，B 級4分，C 級6分 ）

(1)　a の値を求めよ．

(2)　もう1つの解を求めよ．

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 実数 a に対して，2 次方程式 $x^2 - 2ax + 3 = 0$ の解の 1 つが $x = -2 - \sqrt{7}$ であった．

（ S 級 1 分 50 秒，A 級 3 分，B 級 4 分 30 秒，C 級 7 分 ）

(1) a の値を求めよ．

(2) もう 1 つの解を求めよ．

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

反射テスト　２次方程式　逆算　02　解答解説

1.　実数 a に対して，2 次方程式 $x^2 - 2ax + 4 = 0$ の解の 1 つが $x = 1 + \sqrt{5}$ であった．

（S 級 1 分 40 秒，A 級 2 分 45 秒，B 級 4 分，C 級 6 分）

★ 方程式の解は代入

これは見直しの基礎である．他の見直し方法も以下にあげておく．

★ 見直しは逆・別・概・再 〜 数学の見直しは逆算・別解・概算・再計算の 4 通り．

(1)　a の値を求めよ．

$x = 1 + \sqrt{5}$ を代入すると，

$$
\begin{aligned}
& (1+\sqrt{5})^2 - 2a(1+\sqrt{5}) + 4 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2\sqrt{5} + 5 - 2a(1+\sqrt{5}) + 4 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 10 + 2\sqrt{5} - 2a(1+\sqrt{5}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 5 + \sqrt{5} - a(1+\sqrt{5}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 5 + \sqrt{5} = +a(1+\sqrt{5}) \\
\Leftrightarrow\ & a = \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} \\
\Leftrightarrow\ & a = \frac{(5+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} \quad \leftarrow☆ \\
\Leftrightarrow\ & a = \frac{5\sqrt{5} - 5 + 5 - \sqrt{5}}{5-1} \\
\Leftrightarrow\ & a = \frac{4\sqrt{5}}{4} \\
\Leftrightarrow\ & a = \boldsymbol{\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

★ 分母多項式の有理化

平方根 分母多項式の有理化 01 を参照．

☆別解　途中の有理化を次のように考えられると早い．

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} \\
&= \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}+1} \\
&= \sqrt{5}
\end{aligned}
$$

(2)　もう 1 つの解を求めよ．

$a = \sqrt{5}$ を代入すると，元の 2 次方程式は，

$$x^2 - 2\sqrt{5}x + 4 = 0$$

これを解の公式から解くと，

$$x = \sqrt{5} \pm 1$$

$x = 1 + \sqrt{5}$ ではない，もう 1 つの解は，

$$\boldsymbol{x = \sqrt{5} - 1}$$

☆2 次方程式の係数が整数 (有理数) なら，解 $x = 1+\sqrt{5}$ のもう 1 つの解は $x = 1 - \sqrt{5}$ になるところだが，係数が無理数の場合はそうならないこともある．

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 実数 a に対して，2 次方程式 $x^2-2ax+3=0$ の解の 1 つが $x=-2-\sqrt{7}$ であった．

（ S 級 1 分 50 秒，A 級 3 分，B 級 4 分 30 秒，C 級 7 分 ）

★ 方程式の解は代入

これは見直しの基礎である．他の見直し方法も以下にあげておく．

★ 見直しは逆・別・概・再 〜 数学の見直しは逆算・別解・概算・再計算の 4 通り．

(1) a の値を求めよ．

$x=-2-\sqrt{7}$ を代入すると，

$$
\begin{aligned}
& (-2-\sqrt{7})^2-2a(-2-\sqrt{7})+3=0\\
\Leftrightarrow\ & 4+4\sqrt{7}+7+2a(2+\sqrt{7})+3=0\\
\Leftrightarrow\ & 14+4\sqrt{7}+2a(\sqrt{7}+2)=0\\
\Leftrightarrow\ & 7+2\sqrt{7}+a(\sqrt{7}+2)=0\\
\Leftrightarrow\ & a(\sqrt{7}+2)=-7-2\sqrt{7}\\
\Leftrightarrow\ & a=\frac{-7-2\sqrt{7}}{\sqrt{7}+2}\\
\Leftrightarrow\ & a=\frac{\left(-7-2\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{7}-2\right)}{\left(\sqrt{7}+2\right)\left(\sqrt{7}-2\right)} \quad \leftarrow ☆\\
\Leftrightarrow\ & a=\frac{-7\sqrt{7}+14-14+4\sqrt{7}}{7-4}\\
\Leftrightarrow\ & a=\frac{-3\sqrt{7}}{3}\\
\Leftrightarrow\ & a=\boldsymbol{-\sqrt{7}}
\end{aligned}
$$

★ 分母多項式の有理化

平方根 分母多項式の有理化 01 を参照．

☆別解　途中の有理化を次のように考えられると早い．

$$
\begin{aligned}
a&=\frac{-7-2\sqrt{7}}{\sqrt{7}+2}\\
&=\frac{-\sqrt{7}(\sqrt{7}+2)}{\sqrt{7}+2}\\
&=-\sqrt{7}
\end{aligned}
$$

(2) もう 1 つの解を求めよ．

$a=-\sqrt{7}$ を代入すると，元の 2 次方程式は，

$$x^2+2\sqrt{7}x+3=0$$

これを解の公式から解くと，

$$x=-\sqrt{7}\pm 2$$

$x=-2-\sqrt{7}$ ではない，もう 1 つの解は，

$$\boldsymbol{x=-\sqrt{7}+2}$$

☆ 2 次方程式の係数が整数 (有理数) なら，解 $x=-2-\sqrt{7}$ のもう 1 つの解は $x=-2+\sqrt{7}$ になるところだが，係数が無理数の場合はそうならないこともある．

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）