反射テスト　座標　平行四辺形　02

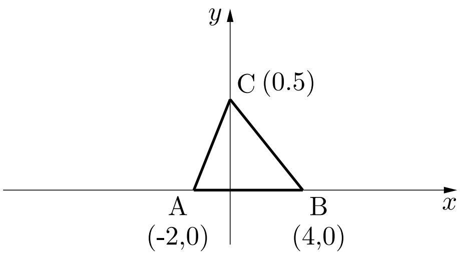
1.　3 点 $\mathrm{A}(-2,0), \mathrm{B}(4,0), \mathrm{C}(0,5)$ がある．もう一点 P を入れた 4 点を結んだ四角形が平行四辺形になるとき，点 P の座標として考えられるものを全て求めよ．（ S 級 50 秒，A 級 1 分 40 秒，B 級 3 分，C 級 5 分 ）

2. 3 点 $\mathrm{A}(0,7), \mathrm{B}(0,-1), \mathrm{C}(5,0)$ がある．もう一点 P を入れた 4 点を結んだ四角形が平行四辺形になるとき，点 P の座標として考えられるものを全て求めよ．（ S 級 50 秒，A 級 1 分 40 秒，B 級 3 分，C 級 5 分 ）

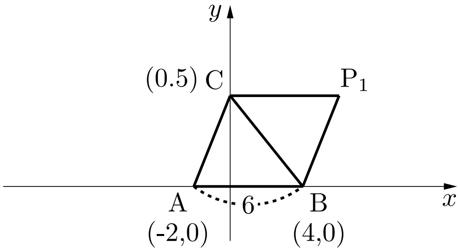
反射テスト　座標　平行四辺形　02　解答解説

1.　3点 $\mathrm{A}(-2,0),\mathrm{B}(4,0),\mathrm{C}(0,5)$ がある．もう一点 P を入れた 4 点を結んだ四角形が平行四辺形になるとき，点 P の座標として考えられるものを全て求めよ．

（ S 級 50 秒，A 級 1 分 40 秒，B 級 3 分，C 級 5 分 ）



答えは 3 種類ある．座標 平行四辺形 01で 1 種類しかなかったのは，四角形 ABCD という指示があったから．
今回は ABCP か ABPC か APBC か…，どれかわからないので，全て調べる．



★ 平行四辺形の対辺は平行．

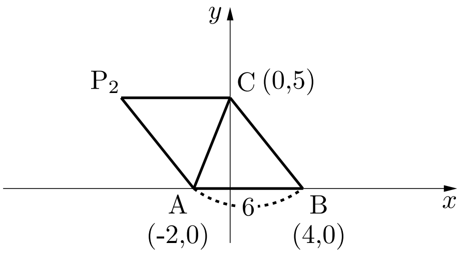
辺 AB が x 軸上にあるので，$\mathrm{CP_1}$は x 軸に平行．

$\mathrm{AB}=\mathrm{B}$ の x 座標 $-$ A の x 座標 $=4-(-2)=6$

★ 平行四辺形の対辺は等しい．

$$\begin{array}{lclcl} \mathrm{P_1}\text{の } x \text{ 座標} & = & \mathrm{C}\text{ の } x \text{ 座標} & + & \mathrm{AB} \\ & = & 0 & + & 6 = 6 \end{array}$$

求める座標は，　$\mathbf{P_1(6,5)}$



★ 平行四辺形の対辺は平行．

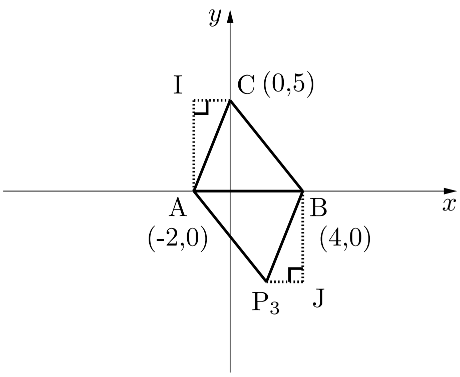
辺 AB が x 軸上にあるので，$\mathrm{P_2C}$ は x 軸に平行．

$\mathrm{AB}=\mathrm{B}$ の x 座標 $-$ A の x 座標 $=4-(-2)=6$

★ 平行四辺形の対辺は等しい．

$$\begin{array}{lclcl} \mathrm{P_2}\text{の } x \text{ 座標} & = & \mathrm{C}\text{ の } x \text{ 座標} & - & \mathrm{AB} \\ & = & 0 & - & 6 = -6 \end{array}$$

求める座標は，　$\mathbf{P_2(-6,5)}$



★ 平行四辺形は点対称．

平行四辺形の左右に軸に平行な 2 辺をもつ直角三角形を作る．

左図において，$\triangle\mathrm{AIC}$ と $\triangle\mathrm{BJP_3}$は合同だから，

$\mathrm{P_3J}=\mathrm{CI}=\mathrm{C}$ の x 座標 $-$ I の x 座標 $=0-(-2)=2$

$\mathrm{BJ}=\mathrm{AI}=\mathrm{I}$ の y 座標 $-$ A の y 座標 $=5-0=5$

$$\begin{array}{lclcl} \mathrm{P_3}\text{の } x \text{ 座標} & = & \mathrm{B}\text{ の } x \text{ 座標} & - & \mathrm{P_3J} \\ & = & 4 & - & 2 = 2 \\ \mathrm{P_3}\text{の } y \text{ 座標} & = & \mathrm{B}\text{ の } y \text{ 座標} & - & \mathrm{BJ} \\ & = & 0 & - & 5 = -5 \end{array}$$

求める座標は，　$\mathbf{P_3(2,-5)}$

以上から，答えは　$\mathbf{(6,5),(-6,5),(2,-5)}$

☆ 別解　平行四辺形の重心は対角線の中点

上図から，$\mathrm{P_1B}$ と CB の中点が一致するから，$\mathrm{P_1}(a_1,b_1)$ とおき，重心の x 座標，y 座標をそれぞれ考えると，

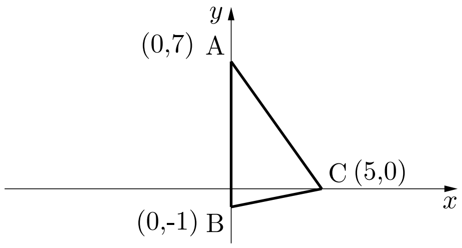
$$\frac{a_1+(-2)}{2}=\frac{0+4}{2} \quad\text{かつ}\quad \frac{b_1+0}{2}=\frac{5+0}{2} \quad\Leftrightarrow\quad a_1=6\ ,\ b_1=5$$

同様にして，$\mathrm{P_2}(a_2,b_2),\mathrm{P_3}(a_3,b_3)$ についても考えて，

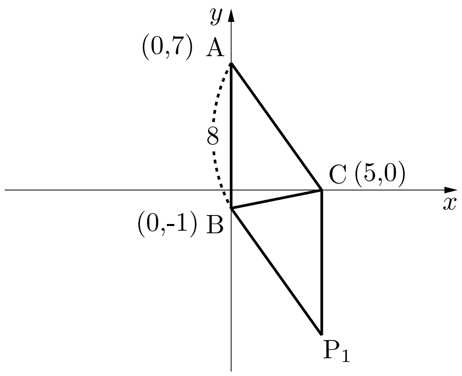
$$\frac{a_2+4}{2}=\frac{-2+0}{2} \quad\text{かつ}\quad \frac{b_2+0}{2}=\frac{0+5}{2} \quad\Leftrightarrow\quad a_2=-6\ ,\ b_2=5$$

$$\frac{a_3+0}{2}=\frac{-2+4}{2} \quad\text{かつ}\quad \frac{b_3+5}{2}=\frac{0+0}{2} \quad\Leftrightarrow\quad a_3=2\ ,\ b_3=-5$$

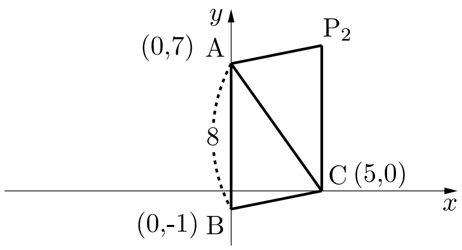
2. 3 点 A$(0,7)$, B$(0,-1)$, C$(5,0)$ がある．もう一点 P を入れた 4 点を結んだ四角形が平行四辺形になるとき，点 P の座標として考えられるものを全て求めよ． （S 級 50 秒，A 級 1 分 40 秒，B 級 3 分，C 級 5 分）



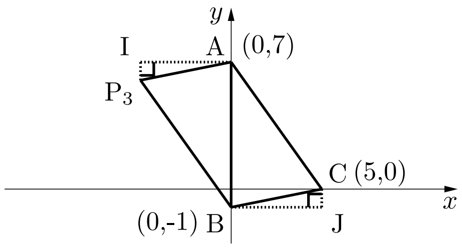
答えは 3 種類ある．座標 平行四辺形 01で 1 種類しかなかったのは，
四角形 ABCD という指示があったから．
今回は ABCP か ABPC か APBC か…，どれかわからないので，全て調べる．



★ 平行四辺形の対辺は平行．
辺 AB が y 軸上にあるので，CP$_1$ は y 軸に平行．
AB = A の y 座標 − B の y 座標 $= 7-(-1) = 8$
★ 平行四辺形の対辺は等しい．
P$_1$の y 座標 = C の y 座標 − AB
$= 0 - 8 = -8$
求める座標は， $\mathbf{P_1(5,-8)}$



★ 平行四辺形の対辺は平行．
辺 AB が y 軸上にあるので，P$_2$C は y 軸に平行．
AB = A の y 座標 − B の y 座標 $= 7-(-1) = 8$
★ 平行四辺形の対辺は等しい．
P$_2$の y 座標 = C の y 座標 + AB
$= 0 + 8 = 8$
求める座標は， $\mathbf{P_2(5,8)}$



★ 平行四辺形は点対称．
平行四辺形の左右に軸に平行な 2 辺をもつ直角三角形を作る．
左図において，△AIP$_3$と △BJC は合同だから，
AI = BJ = J の x 座標 − B の x 座標 $= 5 - 0 = 5$
P$_3$I = CJ = C の y 座標 − J の y 座標 $= 0-(-1) = 1$

P$_3$の x 座標 = A の x 座標 − AI
$= 0 - 5 = -5$
P$_3$の y 座標 = A の y 座標 − P$_3$I
$= 7 - 1 = 6$
求める座標は， $\mathbf{P_3(-5,6)}$

以上から，答えは $\mathbf{(5,-8),(5,8),(-5,6)}$

☆ 別解　平行四辺形の重心は対角線の中点
上図から，P$_1$A と BC の中点が一致するから，P$_1(a_1,b_1)$ とおき，重心の x 座標，y 座標をそれぞれ考えると，

$$\frac{a_1+0}{2} = \frac{0+5}{2} \quad \text{かつ} \quad \frac{b_1+7}{2} = \frac{-1+0}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = 5\ ,\ b_1 = -8$$

同様にして，P$_2(a_2,b_2)$, P$_3(a_3,b_3)$ についても考えて，

$$\frac{a_2+0}{2} = \frac{0+5}{2} \quad \text{かつ} \quad \frac{b_2+(-1)}{2} = \frac{7+0}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a_2 = 5\ ,\ b_2 = 8$$

$$\frac{a_3+5}{2} = \frac{0+0}{2} \quad \text{かつ} \quad \frac{b_3+0}{2} = \frac{7+(-1)}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a_3 = -5\ ,\ b_3 = 6$$