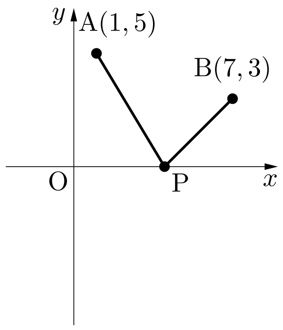
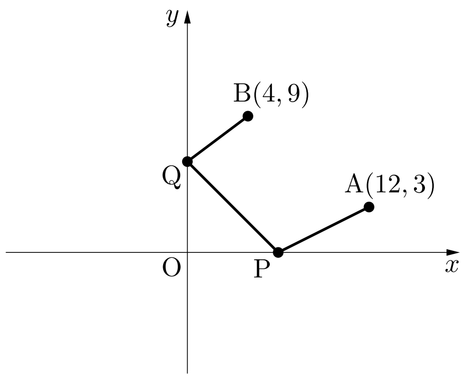
反射テスト　1次関数　折れ線の最短距離　01

1.　P は x 軸上の点，Q は y 軸上の点である．次の問に答えよ．(S 級 1 分 25 秒，A 級 2 分 10 秒，B 級 3 分 20 秒，C 級 5 分)

(1)　$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}$ が最小になるときの点 P の座標を求めよ．

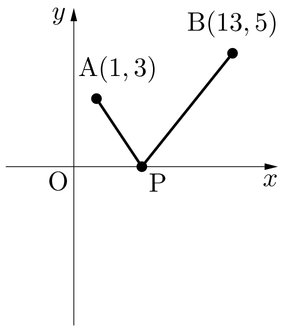


(2)　$\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QB}$ が最小になるときの点 P, Q の座標を両方求めよ．

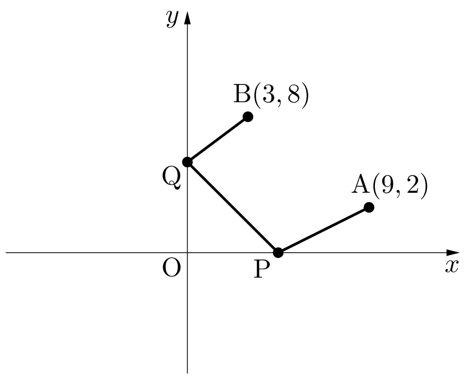


2. P は x 軸上の点, Q は y 軸上の点である. 次の問に答えよ. (S 級 2 分, A 級 2 分 50 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

(1) AP + PB が最小になるときの点 P の座標を求めよ.



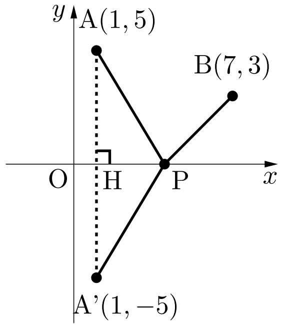
(2) AP + PQ + QB が最小になるときの点 P, Q の座標を両方求めよ.



反射テスト　１次関数　折れ線の最短距離　01　解答解説

1.　P は x 軸上の点，Q は y 軸上の点である．次の問に答えよ．(S 級 1 分 25 秒，A 級 2 分 10 秒，B 級 3 分 20 秒，C 級 5 分)

(1)　$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}$ が最小になるときの点 P の座標を求めよ．



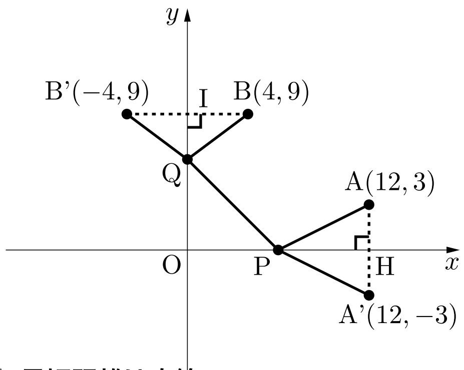
★ 光と鏡のイメージ：最短距離はつねに直線
点 A から x 軸に下ろした垂線の足を H とする．
また x 軸に関して点 A と対称な点を A$'$ とする．
点 P が x 軸のどこにあっても，二辺夾角相等により，
$\triangle\mathrm{AHP}\equiv\triangle\mathrm{A'HP}$ である．
点 P が x 軸のどこにあっても，
$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}=\mathrm{A'P}+\mathrm{PB}$

★ 最短距離は直線
右辺の最小値は，P が直線 A$'$B 上にあるときだから，
直線 A$'$B の方程式がわかれば，それと x 軸との交点が求めたい P の座標になる．

直線 A$'$B の方程式を $y=ax+b$ とおく．
$\mathrm{A'}(1,-5)$　を通る　$\Rightarrow$　$-5=a+b$
$\mathrm{B}(7,3)$　を通る　$\Rightarrow$　$3=7a+b$
$\Rightarrow$　解くと，$(a,b)=\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{19}{3}\right)$
よって直線 A$'$B の方程式は　$y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{19}{3}$

これと x 軸との交点を求める．$y=0$ を代入して，　$0=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{19}{3}$　$\Leftrightarrow$　$x=\dfrac{19}{4}$　　$\therefore$　$\mathbf{P}\left(\dfrac{\mathbf{19}}{\mathbf{4}},\mathbf{0}\right)$

(2)　$\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QB}$ が最小になるときの点 P, Q の座標を両方求めよ．



★ 光と鏡のイメージ：最短距離はつねに直線
点 A から x 軸に下ろした垂線の足を H とし，
点 B から y 軸に下ろした垂線の足を I とする．
また x 軸に関して点 A と対称な点を A$'$，
y 軸に関して点 B と対称な点を B$'$とすれば，
$\triangle\mathrm{AHP}\equiv\triangle\mathrm{A'HP}$ かつ $\triangle\mathrm{BIQ}\equiv\triangle\mathrm{B'IQ}$ である．
つまり，点 P, Q がどこにあっても，
$\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QB}=\mathrm{A'P}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QB'}$

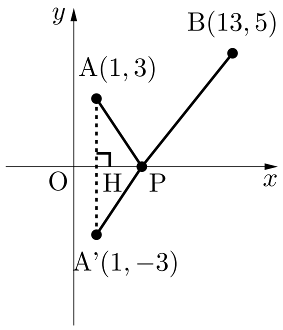
★ 最短距離は直線
右辺の最小値は，P, Q が直線 A$'$B$'$上にあるときだから，
直線 A$'$B$'$の方程式がわかれば，それと x, y 軸との交点が求めたい P, Q の座標になる．

直線 A$'$B$'$の方程式を $y=ax+b$ とおく．
$\mathrm{A'}(12,-3)$　を通る　$\Rightarrow$　$-3=12a+b$
$\mathrm{B'}(-4,9)$　を通る　$\Rightarrow$　$9=-4a+b$
$\Rightarrow$　解くと，$(a,b)=\left(-\dfrac{3}{4},6\right)$
よって直線 A$'$B$'$の方程式は　$y=-\dfrac{3}{4}x+6$

これと x 軸との交点を求める．$y=0$ を代入して，
$0=-\dfrac{3}{4}x+6$　$\Leftrightarrow$　$x=8$　　$\therefore$　$\mathbf{P\,(8,0)}$　　y 軸との交点は切片だから，$\mathbf{Q\,(0,6)}$

2. P は x 軸上の点, Q は y 軸上の点である. 次の問に答えよ. (S 級 2 分, A 級 2 分 50 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

(1) $\mathrm{AP}+\mathrm{PB}$ が最小になるときの点 P の座標を求めよ.



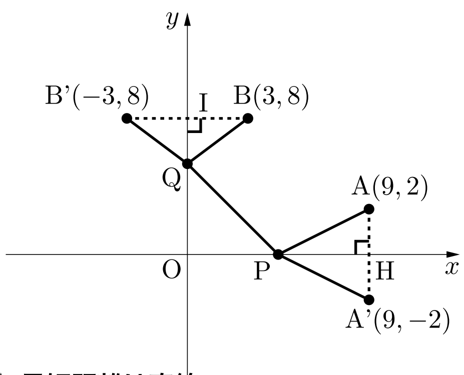
★ 光と鏡のイメージ：最短距離はつねに直線
点 A から x 軸に下ろした垂線の足を H とする.
また x 軸に関して点 A と対称な点を A′ とする.
点 P が x 軸のどこにあっても, 二辺夾角相等により,
$\triangle\mathrm{AHP} \equiv \triangle\mathrm{A'HP}$ である.
点 P が x 軸のどこにあっても,
$\mathrm{AP}+\mathrm{PB} = \mathrm{A'P}+\mathrm{PB}$

★ 最短距離は直線
右辺の最小値は, P が直線 A′B 上にあるときだから,
直線 A′B の方程式がわかれば, それと x 軸との交点が求めたい P の座標になる.

直線 A′B の方程式を $y = ax + b$ とおく.
$\mathrm{A'}(1, -3)$ を通る $\Rightarrow$ $-3 = a + b$
$\mathrm{B}(13, 5)$ を通る $\Rightarrow$ $5 = 13a + b$
$\Rightarrow$ 解くと, $(a, b) = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{11}{3}\right)$
よって直線 A′B の方程式は $y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{11}{3}$

これと x 軸との交点を求める. $y = 0$ を代入して, $0 = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{11}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{11}{2}$ $\quad\therefore\ \mathbf{P}\left(\dfrac{\mathbf{11}}{\mathbf{2}}, \mathbf{0}\right)$

(2) $\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QB}$ が最小になるときの点 P, Q の座標を両方求めよ.



★ 光と鏡のイメージ：最短距離はつねに直線
点 A から x 軸に下ろした垂線の足を H とし,
点 B から y 軸に下ろした垂線の足を I とする.
また x 軸に関して点 A と対称な点を A′,
y 軸に関して点 B と対称な点を B′ とすれば,
$\triangle\mathrm{AHP} \equiv \triangle\mathrm{A'HP}$ かつ $\triangle\mathrm{BIQ} \equiv \triangle\mathrm{B'IQ}$ である.
つまり, 点 P, Q がどこにあっても,
$\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QB} = \mathrm{A'P}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QB'}$

★ 最短距離は直線
右辺の最小値は, P, Q が直線 A′B′ 上にあるときだから,
直線 A′B′ の方程式がわかれば, それと x, y 軸との交点が求めたい P, Q の座標になる.

直線 A′B′ の方程式を $y = ax + b$ とおく.
$\mathrm{A'}(9, -2)$ を通る $\Rightarrow$ $-2 = 9a + b$
$\mathrm{B'}(-3, 8)$ を通る $\Rightarrow$ $8 = -3a + b$
$\Rightarrow$ 解くと, $(a, b) = \left(-\dfrac{5}{6}, \dfrac{11}{2}\right)$
よって直線 A′B′ の方程式は $y = -\dfrac{5}{6}x + \dfrac{11}{2}$

これと x 軸との交点を求める. $y = 0$ を代入して,
$0 = -\dfrac{5}{6}x + \dfrac{11}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{33}{5}$ $\quad\therefore\ \mathbf{P}\left(\dfrac{\mathbf{33}}{\mathbf{5}}, \mathbf{0}\right)$ $\qquad$ y 軸との交点は切片だから, $\mathbf{Q}\left(\mathbf{0}, \dfrac{\mathbf{11}}{\mathbf{2}}\right)$