反射テスト　１次関数　格子点　01

1.　格子点とは x, y 座標ともに整数である点である．△ABC の内部（辺上を含む）にある格子点の数を求めよ．

（ S 級 1 分 50 秒, A 級 3 分, B 級 5 分 30 秒, C 級 8 分 ）

(1)　直線 $\begin{cases} \mathrm{AB} & x = 0 \\ \mathrm{BC} & y = 0 \\ \mathrm{CA} & y = -x + 4 \end{cases}$

(2)　直線 $\begin{cases} \mathrm{AB} & y = \dfrac{1}{2}x + 3 \\ \mathrm{BC} & y = 0 \\ \mathrm{CA} & y = -2x + 8 \end{cases}$

2. 格子点とは x, y 座標ともに整数である点である．△ABC の内部（辺上を含む）にある格子点の数を求めよ．

（ S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 8 分, C 級 12 分 ）

(1) 直線 $\begin{cases} \text{AB} & y = x + 6 \\ \text{BC} & y = 0 \\ \text{CA} & x = 0 \end{cases}$

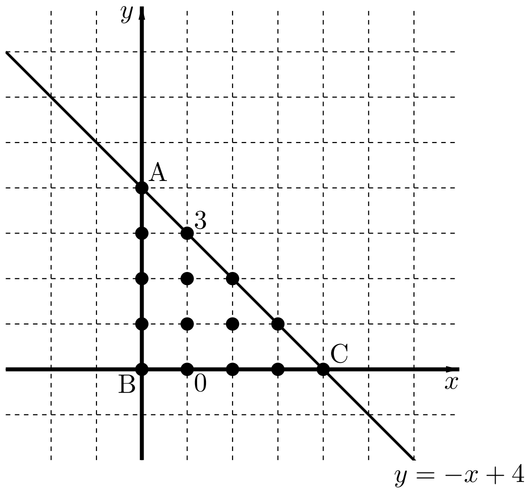
(2) 直線 $\begin{cases} \text{AB} & y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{21}{2} \\ \text{BC} & y = 0 \\ \text{CA} & y = -\dfrac{2}{3}x + 4 \end{cases}$

反射テスト　1次関数　格子点　01　解答解説

1.　格子点とは x, y 座標ともに整数である点である．△ABC の内部（辺上を含む）にある格子点の数を求めよ．

（ S 級 1 分 50 秒，A 級 3 分，B 級 5 分 30 秒，C 級 8 分 ）

(1)　直線 $\begin{cases} \text{AB} & x = 0 \\ \text{BC} & y = 0 \\ \text{CA} & y = -x + 4 \end{cases}$



点 A の座標は，$y = -x + 4$ の切片 A$(0, 4)$

点 B の座標は，$x = 0$ と $y = 0$ の連立解 B$(0, 0)$

点 C の座標は，$y = -x + 4$ と $y = 0$ の連立解 C$(4, 0)$

★ 格子点の個数　基本的に「たて」に数える．

その方が関数の計算と相性がよく，作業が速い．

左図から，

x 座標	0	1	2	3	4
格子点の個数	5 個	4 個	3 個	2 個	1 個

作業例

$x = 1$ のとき，

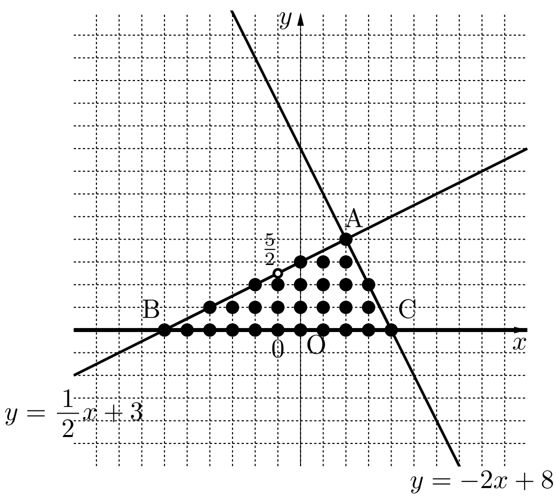
直線 CA 上の点 $y = -1 + 4 = 3$ に 3 と書く．

直線 BC 上の点 $y = 0$ に 0 と書く．

⇒　$y = 0$〜3 だから，$3 - 0 + 1 = 4$ 個

$5 + 4 + 3 + 2 + 1 =$ **15 個**

(2)　直線 $\begin{cases} \text{AB} & y = \dfrac{1}{2}x + 3 \\ \text{BC} & y = 0 \\ \text{CA} & y = -2x + 8 \end{cases}$



点 A の座標は，$y = \dfrac{1}{2}x + 3$ と $y = -2x + 8$ の連立解 A$(2, 4)$

点 B の座標は，$y = \dfrac{1}{2}x + 3$ と $y = 0$ の連立解 B$(-6, 0)$

点 C の座標は，$y = -2x + 8$ と $y = 0$ の連立解 C$(4, 0)$

作業例 1

$x = -1$ のとき，

直線 AB 上の点 $y = \frac{1}{2} \times (-1) + 3 = \frac{5}{2}$ に $\frac{5}{2}$ と書く．(左図の∘)

直線 BC 上の点 $y = 0$ に 0 と書く．

⇒　$y = 0$〜2 だから，$2 - 0 + 1 = 3$ 個

作業例 2　**★ 規則性** を考える．

$1, 1, 2, 2, \cdots$ から数列の規則性を考える．

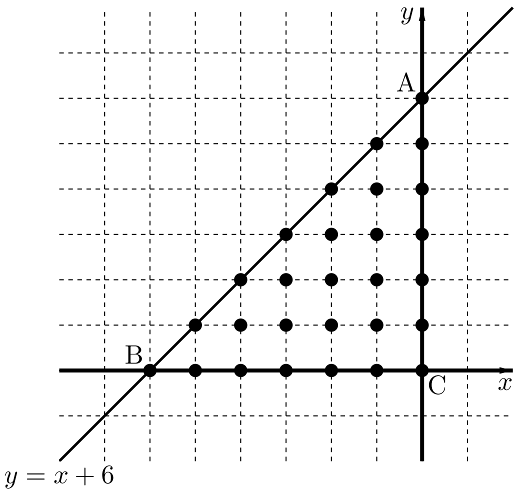
左の列から考えて，

$1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 3 + 1 =$ **29 個**

2.　格子点とは x, y 座標ともに整数である点である．△ABC の内部（辺上を含む）にある格子点の数を求めよ．

（ S 級 3 分，A 級 5 分，B 級 8 分，C 級 12 分 ）

(1)　直線 $\begin{cases} \mathrm{AB} & y = x + 6 \\ \mathrm{BC} & y = 0 \\ \mathrm{CA} & x = 0 \end{cases}$



点 A の座標は，$y = x + 6$ の切片 A$(0, 6)$
点 B の座標は，$y = x + 6$ と $y = 0$ の連立解 B$(-6, 0)$
点 C の座標は，$y = 0$ と $x = 0$ の連立解 C$(0, 0)$

左図から　$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 =$ **28 個**

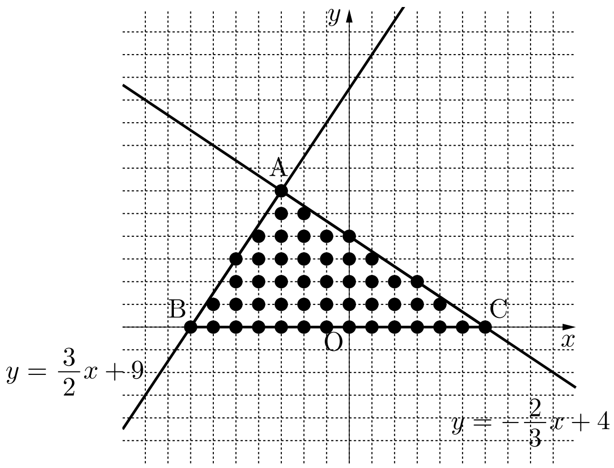
★ 三角数

n 番目	1	2	3	4
三角数	1	$1 + 2 = 3$	$1 + 2 + 3 = 6$	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$

公式　$\boldsymbol{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$

これを知っていれば早い．

(2)　直線 $\begin{cases} \mathrm{AB} & y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{21}{2} \\ \mathrm{BC} & y = 0 \\ \mathrm{CA} & y = -\dfrac{2}{3}x + 4 \end{cases}$



点 A の座標は，$y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{21}{2}$ と $y = -\dfrac{2}{3}x + 4$ の連立解 A$(-3, 6)$
点 B の座標は，$y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{21}{2}$ と $y = 0$ の連立解 B$(-7, 0)$
点 C の座標は，$y = -\dfrac{2}{3}x + 4$ と $y = 0$ の連立解 C$(6, 0)$

作業例　**★ 規則性** を考える．
点 A から左は，$1, 2, 4, 5, \cdots$ 差が $(+1, +2)$ の繰り返し．
点 A から右は，$7, 6, 5, 5, \cdots$ 差が $(-1, -1, 0)$ の繰り返し．

左の列から考えて，
　$1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 6 + 5 + 5 + 4 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 =$ **49 個**

☆補足　**★ 格子点と面積の関係**
格子点の数は面積とほぼ等しい．完全に等しいわけではないが，概算の見直しくらいには使える知識である．
境界上の点は半分外にあるという考え方を使うとより精度が上がる．
2(1) で，$\triangle \mathrm{OAB} = \dfrac{6 \times 6}{2} = 18$.
　図から，内部の点は $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ 個 であり，境界線上の点は $6 \times 3 = 18$ 個
　よって，$10 + 18 \times \dfrac{1}{2} = 19$ 個 となり，面積 18 に近い．
2(2) で，$\triangle \mathrm{OAB} = \dfrac{13 \times 6}{2} = 39$
　図から，内部の点は 31 個であり，境界線上の点は 18 個．
　よって，$31 + 18 \times \dfrac{1}{2} = 40$ 個 となり，これも面積 39 に近い．
実は次のようなすごい定理がある．証明は「**★ 図形の基本は三角形**」を用いる．

★ ピックの定理（ *Pick's Theorem* ）　**多角形の面積 ＝ (内部の格子点の個数) ＋ $\dfrac{\text{(周上の格子点の個数)}}{2} - 1$**