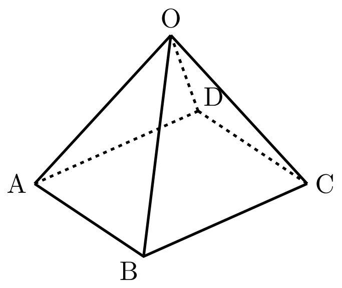
反射テスト　場合の数・確率　多面体の色塗り　01

1.　色の塗り方が何通りあるか答えよ. (S 級 45 秒, A 級 2 分, B 級 4 分, C 級 7 分)

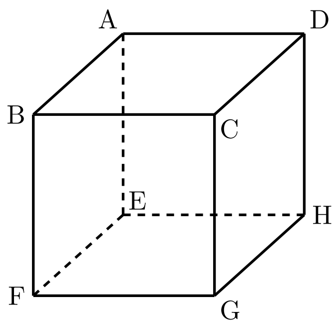
(1)　正四角すい

下図のような全ての側面が正三角形, 底面が正方形からなる四角すいがある. 合計 5 つの面に色をぬりたい. 異なる 5 色を用いて, 全ての面を塗るとき, 色の塗り方は全部で何通りあるか. ただし, 1 つの面には 1 色しか使わず, 回転して同じになるような塗り方は 1 通りと数える.



(2)　正六面体.

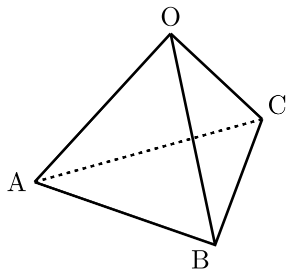
下図のような全ての面が正方形からなる直方体を正六面体または立方体という. 6 つの面に色をぬりたい. 異なる 6 色を用いて, 全ての面を塗るとき, 色の塗り方は全部で何通りあるか. ただし, 1 つの面には 1 色しか使わず, 回転して同じになるような塗り方は 1 通りと数える.



2. 色の塗り方が何通りあるか答えよ. (S 級 55 秒, A 級 2 分, B 級 4 分, C 級 7 分)

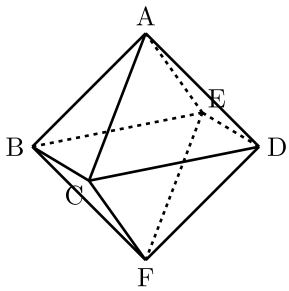
(1) 正四面体

下図のような全ての面が正三角形からなる三角すいを正四面体という. 4 つの面に色をぬりたい. 異なる 4 色を用いて, 全ての面を塗るとき, 色の塗り方は全部で何通りあるか. ただし, 1 つの面には 1 色しか使わず, 回転して同じになるような塗り方は 1 通りと数える.



(2) 正八面体.

下図のような全ての面が正三角形からなる八面体を正八面体という. 8 つの面に色をぬりたい. 異なる 8 色を用いて, 全ての面を塗るとき, 色の塗り方は全部で何通りあるか. ただし, 1 つの面には 1 色しか使わず, 回転して同じになるような塗り方は 1 通りと数える.



反射テスト　場合の数・確率　多面体の色塗り　01　解答解説

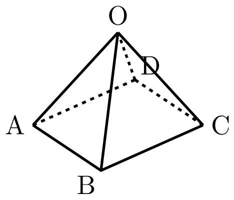
1.　色の塗り方が何通りあるか答えよ. (S 級 45 秒, A 級 2 分, B 級 4 分, C 級 7 分)

★ 順列 ($Permutation$)
異なる n 個のものから r 個のものを **選んで並べる** 場合の数は,

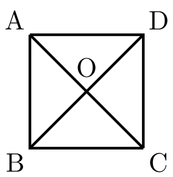
$${}_n\mathbf{P}_r = \boldsymbol{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)} \qquad \leftarrow \boldsymbol{r}\text{ 個の積 になる.}$$
$$= \frac{n!}{(n-r)!} \qquad \leftarrow \text{階乗を用いて表した場合}$$

★ n の階乗　$\boldsymbol{n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$　ちなみに $0! = 1$ である.

(1)　正四角すい
下図のような全ての側面が正三角形, 底面が正方形からなる四角すいがある. 合計 5 つの面に色をぬりたい. 異なる 5 色を用いて, 全ての面を塗るとき, 色の塗り方は全部で何通りあるか. ただし, 1 つの面には 1 色しか使わず, 回転して同じになるような塗り方は 1 通りと数える.

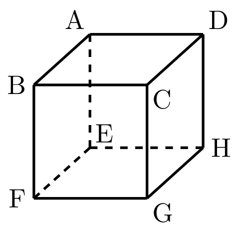


★順列　ものを順番に並べるときは階乗.
単に塗るだけで, $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ 通り.
同じものとして考える場合の数が何通りあるか考えて, それで割ればよい.
底面の取り方は, ABCD のみの **1** 通り.
底面を決めたあと, 垂直軸 (四角錐の高さ) を中心に水平方向に 90°回転しても同じ.
左下の投影図では, 面 ABCD を底面とした.
回転軸は, 頂点 O から底面 ABCD に下ろした垂線.
$360° \div 90° = \mathbf{4}$ 回 , 90°回転をすれば元にもどる.

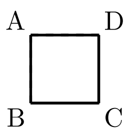


$$\frac{5\text{ 色の塗り方}}{\text{回転して同じになるもの}} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{\mathbf{1 \times 4}} = \mathbf{30\text{ 通り}}$$

(2)　正六面体.
下図のような全ての面が正方形からなる直方体を正六面体または立方体という. 6 つの面に色をぬりたい. 異なる 6 色を用いて, 全ての面を塗るとき, 色の塗り方は全部で何通りあるか. ただし, 1 つの面には 1 色しか使わず, 回転して同じになるような塗り方は 1 通りと数える.



★順列　ものを順番に並べるときは階乗.
単に塗るだけで, $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ 通り.
同じものとして考える場合の数が何通りあるか考えて, それで割ればよい.
底面の取り方は, 六面体だから **6** 通り.
底面を決めたあと, 底面の重心を通る垂直軸に関して 90°回転しても同じ.
左下の投影図では, 面 EFGH を底面とした.
回転軸は, 面 ABCD・面 EFGH のそれぞれの重心をつなぐ直線.
$360° \div 90° = \mathbf{4}$ 回 , 90°回転をすれば元にもどる.



$$\frac{6\text{ 色の塗り方}}{\text{回転して同じになるもの}} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{\mathbf{6} \times \mathbf{4}} = \mathbf{30\text{ 通り}}$$

2. 色の塗り方が何通りあるか答えよ.（ S 級 55 秒, A 級 2 分, B 級 4 分, C 級 7 分 ）

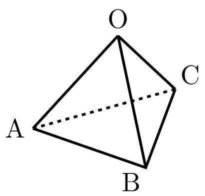
★ 順列（ $Permutation$ ）
異なる n 個のものから r 個のものを **選んで並べる** 場合の数は,

$${}_n\mathbf{P}_r = \boldsymbol{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)} \quad \leftarrow \boldsymbol{r}\textbf{ 個の積} \text{ になる.}$$

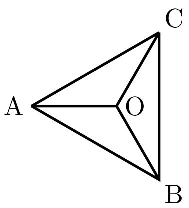
$$= \frac{n!}{(n-r)!} \quad \leftarrow \text{階乗を用いて表した場合}$$

★ $\boldsymbol{n}$ の階乗　$\boldsymbol{n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$　ちなみに $0! = 1$ である.

(1)　正四面体
下図のような全ての面が正三角形からなる三角すいを正四面体という. 4 つの面に色をぬりたい. 異なる 4 色を用いて, 全ての面を塗るとき, 色の塗り方は全部で何通りあるか. ただし, 1 つの面には 1 色しか使わず, 回転して同じになるような塗り方は 1 通りと数える.

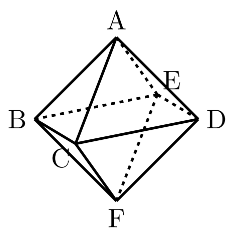


★順列　ものを順番に並べるときは階乗.
単に塗るだけで, $4 \times 3 \times 2 \times 1$ 通り.
同じものとして考える場合の数が何通りあるか考えて, それで割ればよい.
底面の取り方は, 四面体だから **4** 通り.
底面を決めたあと, 底面の重心を通る垂直軸に関して 120°回転しても同じ.
左下の投影図では, 面 ABC を底面とした.
回転軸は頂点 O から底面 ABC に下ろした垂線である.
$360° \div 120° = \mathbf{3}$ 回 , 120°回転をすれば元にもどる.

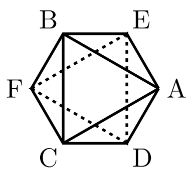


$$\frac{4\text{ 色の塗り方}}{\text{回転して同じになるもの}} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{\mathbf{4 \times 3}} = \mathbf{2}\textbf{ 通り}$$

(2)　正八面体.
下図のような全ての面が正三角形からなる八面体を正八面体という. 8 つの面に色をぬりたい. 異なる 8 色を用いて, 全ての面を塗るとき, 色の塗り方は全部で何通りあるか. ただし, 1 つの面には 1 色しか使わず, 回転して同じになるような塗り方は 1 通りと数える.



★順列　ものを順番に並べるときは階乗.
単に塗るだけで, $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ 通り.
同じものとして考える場合の数が何通りあるか考えて, それで割ればよい.
底面の取り方は, 八面体だから **8** 通り.
底面を決めたあと, 底面の重心を通る垂直軸に関して 120°回転しても同じ.
左下の投影図では, 面 DEF を底面とした.
回転軸は面 DEF と面 ABC の重心をつなぐ直線になる.
$360° \div 120° = \mathbf{3}$ 回 , 120°回転をすれば元にもどる.



$$\frac{8\text{ 色の塗り方}}{\text{回転して同じになるもの}} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{\mathbf{8 \times 3}} = \mathbf{1680}\textbf{ 通り}$$