

はさみうちの原理の応用

1. 自然数 n に対して, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めたい. (15 分)
- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (α は実数) が存在するものとして, α を予想せよ.
- (2) 自然数 n に対して, $b_n = a_n - \alpha$ とする. $|b_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|b_n|$ を証明せよ.
- (3) はさみうちの原理を用いて, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

2. 自然数 n に対して, $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ. < 名古屋大 > (10 分)

はさみうちの原理の応用 解答解説

1. 自然数 n に対して, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めたい. (15 分)
- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (α は実数) が存在するものとして, α を予想せよ.
- (2) 自然数 n に対して, $b_n = a_n - \alpha$ とする. $|b_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|b_n|$ を証明せよ.
- (3) はさみうちの原理を用いて, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

★一般項を求めることが困難な数列の極限

① 極限値を予想 $\Rightarrow$ ② 不等式を作る $\Rightarrow$ ③ ★はさみうちの原理で予想を証明

(1)

$a_n \rightarrow \alpha$ となる α が実数の範囲内に存在すると仮定すれば,

$$\alpha = \sqrt{2 + \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = 2 + \alpha \text{ かつ } \alpha \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + 1)(\alpha - 2) = 0 \text{ かつ } \alpha \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2 \quad \cdots \text{答え}$$

(2)

$b_n = a_n - 2$ とおくと, $a_n = b_n + 2$ より,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \sqrt{4 + b_n} - 2 \\ &= \frac{(\sqrt{4 + b_n} - 2)(\sqrt{4 + b_n} + 2)}{\sqrt{4 + b_n} + 2} \\ &= \frac{b_n}{\sqrt{4 + b_n} + 2} \end{aligned}$$

$\sqrt{a_n + 2} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{b_n + 4} \geq 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) より,

$$|b_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{4 + b_n} + 2} \cdot |b_n| \leq \frac{1}{2}|b_n|$$

(3)

★「 $a_n \rightarrow 2$ を示す」 $\Leftrightarrow$ 「 $|a_n - 2| \rightarrow 0$ を示す」 $\Leftrightarrow$ 「 $|b_n| \rightarrow 0$ を示す」

$$\therefore 0 \leq |b_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot |b_1| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot |a_1 - 2| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$n \rightarrow \infty$ ならば $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow 0$

★はさみうちの原理から, $n \rightarrow \infty$ ならば $|b_n| \rightarrow 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - 2| = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \quad \cdots \text{答え}$$

2. 自然数 n に対して, $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ. < 名古屋大 > (10 分)

$a_n \rightarrow \alpha$ となる α が実数の範囲内に存在すると仮定すれば,

$$\alpha = \sqrt{2\alpha + 3}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = 2\alpha + 3 \text{ かつ } \alpha \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + 1)(\alpha - 3) = 0 \text{ かつ } \alpha \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 3$$

$b_n = a_n - 3$ とおくと, $a_n = b_n + 3$ より,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \sqrt{2b_n + 9} - 3 \\ &= \frac{(\sqrt{2b_n + 9} - 3)(\sqrt{2b_n + 9} + 3)}{\sqrt{2b_n + 9} + 3} \\ &= \frac{2b_n}{\sqrt{2b_n + 9} + 3} \end{aligned}$$

$$\sqrt{2a_n + 3} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2b_n + 9} \geq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \text{ より,}$$

$$|b_{n+1}| = \frac{2}{\sqrt{2b_n + 9} + 3} \cdot |b_n| \leq \frac{2}{3} |b_n|$$

$$\therefore 0 \leq |b_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot |b_1| = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot |a_1 - 3| = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$n \rightarrow \infty \text{ ならば } \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \rightarrow 0$$

★はさみうちの原理から, $n \rightarrow \infty$ ならば $|b_n| \rightarrow 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - 3| = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3 \quad \cdots \text{答え}$$