

微分の重要公式 (★) と証明

1 導関数

1.1 微分係数と導関数の定義

(1) 微分係数の定義

$$\star f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\star f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

上を満たす $f'(a)$ が存在するとき、
「 $f(x)$ は $x = a$ で微分可能」という。

例題 $f(x) = 3x^2 - 7x$ について、 $x = 1$ における微分係数を求めよ。ただし、上の 2 つの定義それぞれを用いて、2 通りの解法で求めること。

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{3(1+h)^2 - 7(1+h)\} - (3 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 - h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3h - 1) = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x^2 - 7x) - (3 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 7x + 4}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(3x-4)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (3x-4) = -1 \end{aligned}$$

(2) 導関数の定義

$$\star f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$f(x)$ が区間 I 内の任意の点で微分可能ならば、
「 $f(x)$ は区間 I で微分可能」という。

☆「微分可能」のイメージは、「なめらか」
ちなみに「連続」のイメージは「切れ目がない」
(ジグザグでもよい)

☆ $f(x)$ を x について微分したものを、
 $f'(x)$ や $\frac{df(x)}{dx}$ で表す。
 $y = f(x)$ とすれば、 $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ という表し方もある。
 Δx , Δy はそれぞれ x, y の増加量である。

例題 二項定理と導関数の定義を用いて次を示せ。

$$\star (x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

$$(x^n)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^n + {}_n C_{n-1} x^{n-1} h + {}_n C_{n-2} x^{n-2} h^2 + \cdots) - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{{}_n C_{n-1} x^{n-1} h + {}_n C_{n-2} x^{n-2} h^2 + \cdots}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} ({}_n C_{n-1} x^{n-1} + {}_n C_{n-2} x^{n-2} h + \cdots) \\ &= {}_n C_{n-1} x^{n-1} = {}_n C_1 x^{n-1} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

例題 $x^2 - 5x$ を定義にそって微分せよ。

$$\begin{aligned} (x^2 - 5x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x+h)^2 - 5(x+h)\} - (x^2 - 5x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - 5x - 5h - x^2 + 5x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2 - 5h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h - 5) = 2x - 5 \end{aligned}$$

例題 次の「ロピタルの定理」を証明せよ。

★「 $f(x), g(x)$ が微分可能で、 $f(a) = g(a) = 0$
かつ $g'(a) \neq 0$ のとき、 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$ である。」

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \frac{x - a}{g(x) - g(a)} \right) = \frac{f'(a)}{g'(a)} \end{aligned}$$

☆非常に強力な定理であるため、高校生の計算力を削ぐとして
大学受験では禁術とされる（笑）。確かめや私大入試の□の穴埋め
のときに利用するのが無難。

1.2 導関数の計算

(1) 積の導関数

$$\star \{f(x) \cdot g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\star (uv)' = u'v + uv' \quad \leftarrow u = f(x), v = g(x) \text{ と考えた場合}$$

証明

$$\begin{aligned} &\{f(x) \cdot g(x)\}' \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h)}{h} \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h) - f(x)\} \cdot g(x+h)}{h} \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot \{g(x+h) - g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \\ &\quad + f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

例題 $(x^3 + 2)(x^2 - 1)$ を x について微分せよ。

$$\begin{aligned} & \{(x^3 + 2)(x^2 - 1)\}' \\ &= (x^3 + 2)'(x^2 - 1) + (x^3 + 2)(x^2 - 1)' \\ &= 3x^2 \cdot (x^2 - 1) + (x^3 + 2) \cdot 2x \\ &= 3x^4 - 3x^2 + 2x^4 + 4x = 5x^4 - 3x^2 + 4x \end{aligned}$$

(2) 商の導関数

x の関数 u, v について次のことが成り立つ.

$$\star \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\star \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

上の公式の証明

$u = f(x), v = g(x)$ とおいて,

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x)}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h) - f(x)\} \cdot g(x) - f(x) \cdot \{g(x+h) - g(x)\}}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h) \cdot g(x)} \\ &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\{g(x)\}^2} \end{aligned}$$

下の公式は、上の公式の $u = 1$ の場合.

これらの公式は、積の導関数と次の合成関数の微分を正しく用いることができれば不必要だが、計算を早くできるメリットがある.

例題 $\frac{3x+1}{x^2-x}$ を x について微分せよ.

$$\begin{aligned} \left(\frac{3x+1}{x^2-x}\right)' &= \frac{(3x+1)' \cdot (x^2-x) - (3x+1) \cdot (x^2-x)'}{(x^2-x)^2} \\ &= \frac{3(x^2-x) - (3x+1) \cdot (2x-1)}{x^2(x-1)^2} \\ &= \frac{-3x^2-2x+1}{x^2(x-1)^2} = -\frac{(x+1)(3x-1)}{x^2(x-1)^2} \end{aligned}$$

例題 $y = \frac{1}{x^4}$ を x について微分せよ.

$$y' = -\frac{(x^4)'}{(x^4)^2} = -\frac{4x^3}{x^8} = -\frac{4}{x^5}$$

1.3 合成関数の微分

(1) $y = f(u), u = g(x)$ がそれぞれ微分可能であるとき,

合成関数 $y = f(g(x))$ も微分可能であり,

$$\star \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\star \{f(g(x))\}' = f'(u) \cdot g'(x)$$

証明 1

$y = f(u), u = g(x)$ とする. 導関数の定義から,

$$\frac{dy}{du} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{f(u+p) - f(u)}{p}$$

$$\frac{du}{dx} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{g(x+q) - g(x)}{q}$$

ここで, $p = g(x+q) - g(x)$ とすれば,

$q \rightarrow 0 \Leftrightarrow p \rightarrow 0$ であるから,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{f(u+p) - f(u)}{p} \cdot \lim_{q \rightarrow 0} \frac{g(x+q) - g(x)}{q} \\ &= \lim_{q \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(u+p) - f(u)}{p} \cdot \frac{g(x+q) - g(x)}{q} \right\} \\ &= \lim_{q \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(u+g(x+q) - g(x)) - f(u)}{p} \cdot \frac{p}{q} \right\} \\ &= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{f(g(x) + g(x+q) - g(x)) - f(g(x))}{q} \\ &= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{f(g(x+q)) - f(g(x))}{q} = \frac{df(g(x))}{dx} = \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

証明 2

$\Delta x \rightarrow 0$ のとき, $\Delta u \rightarrow 0$ であるから,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{dx} &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

例題 $y = (x^2 - 3x + 1)^4$ を x について微分せよ.

$u = x^2 - 3x + 1$ とおくと, $y = u^4$ となり,

$$\frac{dy}{du} = 4u^3 \quad \frac{du}{dx} = 2x - 3$$

合成関数の微分により,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u^3 \cdot (2x - 3) = 4(x^2 - 3x + 1)^3(2x - 3)$$

例題 $y = \frac{1}{x^2 + 3}$ を x について微分せよ. ただし, 商の導関数による解法と合成関数の微分による解法と 2 通りを示せ.

< 商の導関数を用いる解法 >

$$y' = -\frac{(x^2+3)'}{(x^2+3)^2} = -\frac{2x}{(x^2+3)^2}$$

< 合成関数の微分による解法 >

$u = x^2 + 3$ とおけば, $\frac{du}{dx} = 2x$

また, $y = \frac{1}{u} = u^{-1}$ より, $\frac{dy}{du} = -1 \cdot u^{-2} = -\frac{1}{u^2}$

合成関数の微分により,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \left(-\frac{1}{u^2}\right) \cdot (2x) = -\frac{2x}{(x^2+3)^2}$$

2 主な関数の微分

2.1 三角関数の微分

(1) 正弦の微分

$$\star (\sin x)' = \cos x$$

証明 正弦の加法定理より,

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h) - \sin x}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (\cos h - 1) + \cos x \cdot \sin h}{h} \\
&= \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\
&= \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{-(1 - \cos h)}{h^2} \cdot h \right\} + \cos x \cdot 1 \\
&= \sin x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \cos x = \cos x
\end{aligned}$$

(2) 余弦の微分

$$\star (\cos x)' = -\sin x$$

証明 余弦の加法定理より,

$$\begin{aligned}
(\cos x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h) - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot (\cos h - 1) - \sin x \cdot \sin h}{h} \\
&= \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\
&= \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{-(1 - \cos h)}{h^2} \cdot h \right\} - \sin x \cdot 1 \\
&= \cos x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 - \sin x = -\sin x
\end{aligned}$$

例題 $y = \tan x$ を x について微分せよ.

$$\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}$$

$$\star \text{公式} \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

2.2 自然対数の微分

(1) 自然対数の微分

$$\star (\log x)' = \frac{1}{x}$$

ただし, $\log x$ は自然対数 (ネイピア数 e を底とする対数)

証明 $x > 0$ より,

$$\begin{aligned}
(\log x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \cdot \log \frac{x+h}{x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \cdot \log \left(1 + \frac{h}{x} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \log \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x} \cdot \log e = \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

ネイピア数 e の定義は,

$$\star e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$$

(イメージは, 「 $(1+\bigcirc)^\Delta$ の $\bigcirc$ と Δ が逆数で, $\bigcirc \rightarrow 0$ 」)

$$\text{よって, } \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} = e$$

☆これから底を省略した対数は, 自然対数と考えること.

例題 $y = \log(x^2 + 3)$ を x について微分せよ.

$$u = x^2 + 3 \text{ とおくと, } \frac{du}{dx} = 2x$$

合成関数の微分より,

$$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du} (\log u) \cdot 2x = \frac{1}{u} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 3}$$

(2) 自然対数の微分 2

$$\star (\log |x|)' = \frac{1}{x}$$

証明は場合分けして上と同様. それよりもイメージを以下の座標平面からくみとってほしい.

図1 $y = \log |x|$

(y 軸で線対称である)

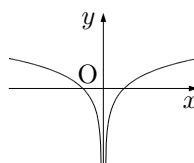
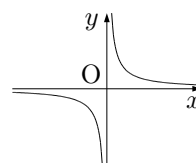


図2 $y = \frac{1}{x}$



★微分係数は接線の傾きを表す. 図1を見ると, $x < 0$ において, $y = \log |x|$ の接線の傾きは常に負である. 図2から, 関数 $y = \frac{1}{x}$ は $x < 0$ において常に負である. よってイメージが重なる.

例題 $y = \log |2x + 3|$ を x について微分せよ.

$$u = 2x + 3 \text{ とおくと, } \frac{du}{dx} = 2 \text{ である.}$$

合成関数の微分より,

$$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du} (\log u) \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot 2 = \frac{2}{2x + 3}$$

2.3 対数微分法

(1) 対数微分法

$$\star (\log y)' = \frac{y'}{y} \quad (\text{ただし, } y \text{ は } x \text{ の関数})$$

証明

合成関数の微分と考えて,

$$(\log y)' = \frac{d}{dy} (\log y) \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{y}$$

例題 p が有理数のとき, $x > 0$ に対して $y = x^p$ を対数微分法を用いて微分せよ.

両辺の自然対数をとると,

$$\log y = \log x^p$$

$$\log y = p \log x$$

両辺を x について微分すると,

$$\frac{y'}{y} = \frac{p}{x} \Rightarrow y' = \frac{py}{x} = \frac{px^p}{x} = px^{p-1}$$

これを用いて, 指数関数 a^x の微分を導こう.

2.4 指数関数の微分

(1) 指数関数の微分

$$\star (a^x)' = a^x \cdot \log a$$

証明

$y = a^x$ において、両辺の自然対数をとると、

$$\log y = \log a^x$$

$$\log y = x \log a$$

両辺を微分して、

$$\frac{y'}{y} = \log a \quad \Rightarrow \quad y' = y \log a = a^x \log a$$

例題 $y = 3^x$ を x について微分せよ.

$$y' = 3^x \log 3$$

(2) 指数関数の微分 2

$$\star (e^x)' = e^x$$

証明

(1) で、 $a = e$ を代入する.

例題 $y = x^2 e^x$ を x について微分せよ.

積の導関数より、

$$\begin{aligned} y' &= (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot (e^x)' \\ &= 2xe^x + x^2 e^x = x(x+2)e^x \end{aligned}$$

2.5 逆関数の微分

(1) 逆関数の微分

$$\star \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

証明 1

$y = f(x)$ とおき、その逆関数を $x = f^{-1}(y)$ とする.

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h}$$

$h = f(x+t) - f(x)$ とおくと、 $t \rightarrow 0 \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

$$\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{f^{-1}(f(x) + f(x+t) - f(x)) - f^{-1}(x)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{f^{-1}(f(x+t)) - x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{(x+t) - x}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \frac{dy}{dx}$$

☆ $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x$ である.

証明 2

$\Delta x \rightarrow 0$ のとき、 $\Delta y \rightarrow 0$ である.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

例題として、一般的な対数関数の微分を証明してみよう.

(2) 対数関数の微分

$$\star (\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$$

証明

$y = \log_a x$ とおくと、 $x = a^y$ であるから、 $\frac{dx}{dy} = a^y \log a$

よって、逆関数の微分より、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{a^y \log a} = \frac{1}{x \log a}$$

例題 $y = \log_3(x+2)$ を x について微分せよ.

$$y' = \frac{1}{(x+2) \log 3}$$

(ただし、 $\log 3$ は底を e とする自然対数)