平均値の定理と不等式の証明　練習問題

★ 平均値の定理

$f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ において連続かつ $a < x < b$ で微分可能であるとき,

$a < c < b$　かつ　$f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

を満たす c が存在する.

1.　正の実数 a, b があって, $a < b$ を満たすとき, 次の不等式を証明せよ.

(1)　$a < \dfrac{ab}{b-a} \log \dfrac{b}{a} < b$

$f(x) = \log x$ とおくと, $a \leqq x \leqq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能であるから,
平均値の定理より,

$a < c < b$　かつ　$f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$　を満たす c が存在する.

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$ であるから, $f'(c) = \dfrac{1}{c}$

また,　$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{\log b - \log a}{b - a} = \dfrac{1}{b-a} \log \dfrac{b}{a}$

ゆえに,　$\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{b-a} \log \dfrac{b}{a}$　$\cdots$①

$0 < a < c < b$ より, $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{a}$　$\cdots$②

よって, ①と②より,

$\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{b-a} \log \dfrac{b}{a} < \dfrac{1}{a}$

$0 < a < b$ より, $ab > 0$ であるから, これを掛けて,

$a < \dfrac{ab}{b-a} \log \dfrac{b}{a} < b$

(2)　$e^a(b-a) < e^b - e^a < e^b(b-a)$

$f(x) = e^x$ とおくと, $a \leqq x \leqq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能であるから,
平均値の定理より,

$a < c < b$　かつ　$f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$　を満たす c が存在する.

$f'(x) = e^x$ であるから, $f'(c) = e^c$

また,　$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{e^b - e^a}{b - a}$

ゆえに,　$e^c = \dfrac{e^b - e^a}{b - a}$　$\cdots$①

$a < c < b$ より, $e^a < e^c < e^b$　$\cdots$②

よって, ①と②より,

$e^a < \dfrac{e^b - e^a}{b - a} < e^b$

$a < b$ より, $b - a > 0$ であるから, これを掛けて,

$e^a(b-a) < e^b - e^a < e^b(b-a)$

2.　$x > 0$ のとき, 次の不等式を証明せよ.

(1)　$\dfrac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log x < \dfrac{1}{x}$

$f(t) = \log t$ とおくと, $x \leqq t \leqq x+1$ で連続, $x < t < x+1$ で微分可能であるから, 平均値の定理より,

$x < t < x+1$ かつ $f'(c) = \dfrac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x}$ を満たす c が存在する．

$f'(t) = \dfrac{1}{t}$ であるから，$f'(c) = \dfrac{1}{c}$ また，$\dfrac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = \log(x+1) - \log x$

ゆえに，$\dfrac{1}{c} = \log(x+1) - \log x$ …①

$0 < x < c < x+1$ より，$\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{x}$ …②

よって，①と②より，$\dfrac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log x < \dfrac{1}{x}$

（2） $\dfrac{x}{x+1} < \log(x+1) < x$

$f(t) = \log t$ とおくと，$1 \leqq t \leqq x+1$ で連続，$1 < t < x+1$ で微分可能であるから，平均値の定理より，

$1 < t < x+1$ かつ $f'(c) = \dfrac{f(x+1) - f(1)}{(x+1) - 1}$ を満たす c が存在する．

$f'(t) = \dfrac{1}{t}$ であるから，$f'(c) = \dfrac{1}{c}$ また，$\dfrac{f(x+1) - f(1)}{(x+1) - 1} = \dfrac{\log(x+1) - \log 1}{x} = \dfrac{\log(x+1)}{x}$

ゆえに，$\dfrac{1}{c} = \dfrac{\log(x+1)}{x}$ …①

$0 < 1 < c < x+1$ より，$\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{c} < 1$ …②

よって，①と②より，$\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{\log(x+1)}{x} < 1$

$x > 0$ より，これを掛けて，$\dfrac{x}{x+1} < \log(x+1) < x$

（3） $0 < \dfrac{1}{x} \log \dfrac{e^x - 1}{x} < 1$

$f(t) = e^t$ とおくと，$0 \leqq t \leqq x$ で連続，$0 < t < x$ で微分可能であるから，平均値の定理より，

$0 < c < x$ かつ $f'(c) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ を満たす c が存在する．

$f'(t) = e^t$ であるから，$f'(c) = e^c$ また，$\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{e^x - e^0}{x} = \dfrac{e^x - 1}{x}$

ゆえに，$e^c = \dfrac{e^x - 1}{x}$ …①

$0 < c < x$ より，$e^0 < e^c < e^x \Rightarrow 1 < e^c < e^x$ …②

よって，①と②より，$1 < \dfrac{e^x - 1}{x} < e^x$

真数条件を満たすので，自然対数をとって，$\log 1 < \log \dfrac{e^x - 1}{x} < \log e^x \Rightarrow 0 < \log \dfrac{e^x - 1}{x} < x$

$x > 0$ より，x で割って，$0 < \dfrac{1}{x} \log \dfrac{e^x - 1}{x} < 1$