

平均値の定理と不等式の証明 練習問題

★ 平均値の定理

$f(x)$ が $a \leq x \leq b$ において連続かつ $a < x < b$ で微分可能であるとき,
 $a < c < b$ かつ $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
を満たす c が存在する.

1. 正の実数 a, b があって, $a < b$ を満たすとき, 次の不等式を証明せよ.

$$(1) \quad a < \frac{ab}{b-a} \log \frac{b}{a} < b$$

$$(2) \quad e^a(b-a) < e^b - e^a < e^b(b-a)$$

2. $x > 0$ のとき, 次の不等式を証明せよ.

$$(1) \quad \frac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log x < \frac{1}{x}$$

$$(2) \quad \frac{x}{x+1} < \log(x+1) < x$$

$$(3) \quad 0 < \frac{1}{x} \log \frac{e^x - 1}{x} < 1$$