数学 1A　対称式・交代式　（因数分解は降べきの順で）

1　2元対称式

a，b の整式で，a と b を入れ替えても，元の式と同一になるものを，a，b についての対称式という．

基本対称式 $\cdots$ $a+b$，ab．

対称式は，基本対称式で表すことが可能である．

■例題　次の式を基本対称式で表せ．

(1)　a^2+b^2

$=a^2+2ab+b^2-2ab$

$=\boldsymbol{(a+b)^2-2ab}$　←★公式

(2)　a^3+b^3

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-3a^2b-3ab^2$

$=\boldsymbol{(a+b)^3-3ab(a+b)}$　←★公式

(3)　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

$=\dfrac{b}{ab}+\dfrac{a}{ab}$

$=\boldsymbol{\dfrac{a+b}{ab}}$　←★公式

■類題　1.　次の式を基本対称式で表せ．

(1)　a^2+ab+b^2

$=a^2+2ab+b^2-ab$

$=\boldsymbol{(a+b)^2-ab}$

(2)　$a^3+a^2b+ab^2+b^3$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-2a^2b-2ab^2$

$=\boldsymbol{(a+b)^3-2ab(a+b)}$

(3)　$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$

$=\dfrac{b^2}{a^2b^2}+\dfrac{a^2}{a^2b^2}$

$=\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}$

$=\boldsymbol{\dfrac{(a+b)^2-2ab}{(ab)^2}}$

(4)　$a(a^2+b^2)+b(a^2+b^2)$

$=(a+b)(a^2+b^2)$

$=\boldsymbol{(a+b)\{(a+b)^2-2ab\}}$

(5)　$\dfrac{1}{a^6b}+\dfrac{1}{ab^6}$

$=\dfrac{b^5}{a^6b^6}+\dfrac{a^5}{a^6b^6}$

$=\dfrac{a^5+b^5}{(ab)^6}$

$=\dfrac{(a^3+b^3)(a^2+b^2)-a^3b^2-a^2b^3}{(ab)^6}$

$=\dfrac{\{(a+b)^3-3ab(a+b)\}\{(a+b)^2-2ab\}-(ab)^2(a+b)}{(ab)^6}$

$=\boldsymbol{\dfrac{(a+b)^5-5ab(a+b)^3+5(ab)^2(a+b)}{(ab)^6}}$

2.　$a^2(b+1)+b^2(a+1)+a(b+1)+b(a+1)$　を因数分解せよ．

☆どんな対称式・交代式でも a についての降べきの順に並べればできる．

与式 $=a^2(b+1)+a(b^2+2b+1)+b^2+b=a^2(b+1)+a(b+1)^2+b(b+1)$

$=(b+1)\{a^2+a(b+1)+b\}=(b+1)(a+b)(a+1)$

$=\boldsymbol{(a+1)(b+1)(a+b)}$

2　3元対称式

a，b，c の整式で，a，b，c のうちどの 2 つを入れ替えても，元の式と同一になるものを，a，b，c についての対称式という．

基本対称式 ⋯ $a+b+c$，$ab+bc+ca$，abc．

対称式は，基本対称式で表すことが可能である．

a，b，c の対称式は，$a+b$，$b+c$，$c+a$ のうち 1 つが因数なら，他の 2 つも因数である．

■**例題**　1.　次の式を基本対称式で表せ．

(1)　$a^2+b^2+c^2$

$= \boldsymbol{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}$

★公式

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

与式は，これの変形である．

(2)　$a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$　←★公式

$= \boldsymbol{(a+b+c)\{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\}+3abc}$

2.　$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc$　を因数分解せよ．

☆どんな対称式・交代式でも a についての降べきの順に並べればできる．

与式 $=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)$　← a について降べきの順

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

$= \boldsymbol{(a+b)(b+c)(c+a)}$

■**類題**　1.　次の式を基本対称式で表せ．

(1)　$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)+ab+bc+ca$

$= \boldsymbol{(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)}$

(2)　$a^4bc+ab^4c+abc^4$

$=abc(a^3+b^3+c^3)$

$=abc\{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc\}$

$= \boldsymbol{abc[(a+b+c)\{(a+b+c)^2}$

$\boldsymbol{-3(ab+bc+ca)\}+3abc]}$

2.　次の式を因数分解せよ．

(1)　$(x+y+z)+(xy+yz+zx)+xyz+1$

$=xyz+xy+zx+x+yz+y+z+1$

$=x(yz+y+z+1)+(yz+y+z+1)$

$=(x+1)(yz+y+z+1)$

$= \boldsymbol{(x+1)(y+1)(z+1)}$

(2)　$(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz$

$=x^2(y+z)+x(y^2+z^2+2yz)+yz(y+z)$

$=x^2(y+z)+x(y+z)^2+yz(y+z)$

$=\{x^2+(y+z)x+yz\}(y+z)$

$=(x+y)(x+z)(y+z)$

$= \boldsymbol{(x+y)(y+z)(z+x)}$

3　2元交代式

a，b の整式で，a と b を入れ替えても，元の式と符号だけが変わるものを，a，b についての交代式という．a，b の交代式は，因数 $a-b$ を持ち，他の因数は対称式となる．

★ a，b についての 2 元交代式 $=\boldsymbol{(a-b)}\times$ **対称式**

■例題　次の式を因数分解せよ．

(1)　a^2-b^2

$=\boldsymbol{(a-b)(a+b)}$

(2)　a^3-b^3

$=\boldsymbol{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

■類題　次の式を因数分解せよ．

(1)　a^4-b^4

$=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$
$=\boldsymbol{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)}$

(2)　$a^2(b-1)-b^2(a-1)+a-b$

$=a^2(b-1)-a(b^2-1)+b(b-1)$
$=a^2(b-1)-a(b-1)(b+1)+b(b-1)$
$=(b-1)\{a^2-a(b+1)+b\}$
$=(b-1)(a-b)(a-1)$
$=\boldsymbol{(a-b)(a-1)(b-1)}$

☆ここでも降べきの順に並べるのがポイント

4　3元交代式

a，b，c の整式で，a，b，c のうちどの 2 つを入れ替えても，元の式と符号だけが変わるものを，a，b，c についての交代式という．a，b，c の交代式は，因数 $a-b$，$b-c$，$c-a$ を持ち，他の因数は a，b，c の対称式となる．

★ a，b，c についての 3 元交代式 $=\boldsymbol{(a-b)(b-c)(c-a)}\times$ **対称式**

■例題　次の式を因数分解せよ．

(1)　$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$
$=a^2(b-c)-a(b-c)(b+c)+bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$
$=(b-c)(a-b)(a-c)$
$=\boldsymbol{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

■類題　次の式を因数分解せよ．

(1)　$a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

$=-a^2(b-c)+a(b^2-c^2)-bc(b-c)$
$=-a^2(b-c)+a(b-c)(b+c)-bc(b-c)$
$=-(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$
$=-(b-c)(a-b)(a-c)$
$=\boldsymbol{(a-b)(b-c)(c-a)}$

(2)　$a^2b^2c(a-b)+ab^2c^2(b-c)+a^2bc^2(c-a)$

$=abc\{ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)\}$
$=abc\{a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)\}$
$=abc\{a^2(b-c)-a(b+c)(b-c)+bc(b-c)\}$
$=abc(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$
$=abc(b-c)(a-b)(a-c)$
$=\boldsymbol{-abc(a-b)(b-c)(c-a)}$

■**練習**　次の式が対称式か交代式か調べて因数分解せよ．(2) は通分して分子を因数分解せよ．

(1)　$xyz-(xy+yz+zx)+(x+y+z)-1$

x と y を入れ替えると，

$yxz-(yx+xz+zy)+(y+x+z)-1$

他も同様だから，これは **対称式．**

与式 $=xyz-xy-zx+x-yz+y+z-1$

$=x\{yz-(y+z)+1\}-(yz-y-z+1)$

$=x(y-1)(z-1)-(y-1)(z-1)$

$=\boldsymbol{(x-1)(y-1)(z-1)}$

(2)　$\frac{x-y}{z}+\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}$

$=\frac{xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)}{xyz}$

分子の x と y を入れ替えると，

$yx(y-x)+xz(x-z)+zy(z-y)$

$=-xy(x-y)-yz(y-z)-zx(z-x)$

よって，これは **交代式．**

分子 $=x^2(y-z)-x(y^2-z^2)+yz(y-z)$

$=(y-z)\{x^2-x(y+z)+yz\}$

$=(y-z)(x-y)(x-z)$

$=-(x-y)(y-z)(z-x)$

$\therefore$ 与式 $=\boldsymbol{-\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz}}$

(3)　$a^2(b-c)-b^2(c-a)+c^2(a+b)-2abc$

a と b を入れ替えると，

$b^2(a-c)-a^2(c-b)+c^2(b+a)-2bac$

$=a^2(b-c)-b^2(c-a)+c^2(a+b)-2abc$

対称式に思えるが，b と c を入れ替えると，

$a^2(c-b)-c^2(b-a)+b^2(a+c)-2acb$

$=-a^2(b-c)+b^2(c+a)+c^2(a-b)-2abc$

よって，これは **対称式でも交代式でもない．**

与式 $=a^2(b-c)+a(b^2-2bc+c^2)-bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2+a(b-c)-bc\}$

$=(b-c)(a+b)(a-c)$

$=\boldsymbol{-(a+b)(b-c)(c-a)}$

(4)　$(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)$

x と y を入れ替えると，

$(y+x+z)^3-(y^3+x^3+z^3)$

他も同様だから，これは **対称式．**

$x+y+z=A$ とおくと，

与式 $=A^3-x^3-(y^3+z^3)$

$=(A-x)(A^2+Ax+x^2)-(y+z)(y^2-yz+z^2)$

$=(y+z)\{(x+y+z)^2+(x+y+z)x+x^2-(y^2-yz+z^2)\}$

$=(y+z)\{3x^2+3(y+z)x+3yz\}$

$=(y+z)\cdot 3(x+y)(x+z)$

$=\boldsymbol{3(x+y)(y+z)(z+x)}$

☆もちろん x について降べきの順に並べてもできる．

しかし，計算が面倒なため，上のような解法にした．

■**発展**　$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$ を因数分解せよ．

☆これも地道に降べきの順に並べ替えればできるが，次のような解法がある．

与式は交代式であるから，因数として，$a-b$，$b-c$，$c-a$ をもつ．

次数を考えると，与式は a についての 2 次式．(3 次式ではない．なぜならば $-a^3+a^3=0$ で 3 次の項は消える．)

ゆえに a，b，c に対する定数 k を用いて，与式 $=k(b-c)(c-a)(a-b)$ と因数分解できる．

a^2 の係数を比較しよう．$\begin{cases} \text{与式の } a^2 \text{ の係数} & -3b^2+3c^2=-3(b^2-c^2) \\ k(b-c)(c-a)(a-b) \text{ の } a^2 \text{ の係数} & -kb^2+kc^2=-k(b^2-c^2) \end{cases}$

よって，$k=3$　$\Rightarrow$　与式 $=\boldsymbol{3(b-c)(c-a)(a-b)}$

☆この解法を用いると，対称式・交代式の因数分解が早く解ける．