数学 1A　対称式・交代式　（因数分解は降べきの順で）

1　2元対称式

a , b の整式で，a と b を入れ替えても，元の式と同一になるものを，a , b についての対称式という．

基本対称式 $\cdots$ $\boldsymbol{a+b}$, $\boldsymbol{ab}$.

対称式は，基本対称式で表すことが可能である．

■例題　次の式を基本対称式で表せ．

(1)　a^2+b^2

$= a^2+2ab+b^2-2ab$

$= (a+b)^2-2ab$　←★公式

(2)　a^3+b^3

$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-3a^2b-3ab^2$

$= (a+b)^3-3ab(a+b)$　←★公式

(3)　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

$= \dfrac{b}{ab}+\dfrac{a}{ab}$

$= \dfrac{a+b}{ab}$　←★公式

■類題　1.　次の式を基本対称式で表せ．

(1)　a^2+ab+b^2

(2)　$a^3+a^2b+ab^2+b^3$

(3)　$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$

(4)　$a(a^2+b^2)+b(a^2+b^2)$

(5)　$\dfrac{1}{a^6b}+\dfrac{1}{ab^6}$

2.　$a^2(b+1)+b^2(a+1)+a(b+1)+b(a+1)$ を因数分解せよ．

2　3元対称式

a , b , c の整式で, a , b , c のうちどの 2 つを入れ替えても, 元の式と同一になるものを, a , b , c についての対称式という.

基本対称式 ⋯ $\boldsymbol{a+b+c}$, $\boldsymbol{ab+bc+ca}$, $\boldsymbol{abc}$.

対称式は，基本対称式で表すことが可能である.

a , b , c の対称式は, $a+b$, $b+c$, $c+a$ のうち 1 つが因数なら, 他の 2 つも因数である.

■例題　1.　次の式を基本対称式で表せ.

(1)　$a^2+b^2+c^2$

$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

★公式

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

与式は, これの変形である.

(2)　$a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$　←★公式

$=(a+b+c)\{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\}+3abc$

2.　$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc$ を因数分解せよ.

☆どんな対称式・交代式でも a についての降べきの順に並べればできる.

与式 $=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)$　← a について降べきの順

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

$=(a+b)(b+c)(c+a)$

■類題　1.　次の式を基本対称式で表せ.

(1)　$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

(2)　$a^4bc+ab^4c+abc^4$

2.　次の式を因数分解せよ.

(1)　$(x+y+z)+(xy+yz+zx)+xyz+1$

(2)　$(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz$

3　2元交代式

a, b の整式で，a と b を入れ替えても，元の式と符号だけが変わるものを，a, b についての交代式という．a, b の交代式は，因数 $a-b$ を持ち，他の因数は対称式となる．

★ a, b についての 2 元交代式 $=$ $\boldsymbol{(a-b)}$ $\times$ **対称式**

■例題　次の式を因数分解せよ．

(1)　a^2-b^2

$=(a-b)(a+b)$

(2)　a^3-b^3

$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

■類題　次の式を因数分解せよ．

(1)　a^4-b^4

(2)　$a^2(b-1)-b^2(a-1)+a-b$

4　3元交代式

a, b, c の整式で，a, b, c のうちどの 2 つを入れ替えても，元の式と符号だけが変わるものを，a, b, c についての交代式という．a, b, c の交代式は，因数 $a-b$, $b-c$, $c-a$ を持ち，他の因数は a, b, c の対称式となる．

★ a, b, c についての 3 元交代式 $=$ $\boldsymbol{(a-b)(b-c)(c-a)}$ $\times$ **対称式**

■例題　次の式を因数分解せよ．

(1)　$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$$
\begin{aligned}
&=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)\\
&=a^2(b-c)-a(b-c)(b+c)+bc(b-c)\\
&=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}\\
&=(b-c)(a-b)(a-c)\\
&=-(a-b)(b-c)(c-a)
\end{aligned}
$$

■類題　次の式を因数分解せよ．

(1)　$a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

(2)　$a^2b^2c(a-b)+ab^2c^2(b-c)+a^2bc^2(c-a)$

■**練習**　次の式が対称式か交代式か調べて因数分解せよ. (2) は通分して分子を因数分解せよ.

(1)　$xyz-(xy+yz+zx)+(x+y+z)-1$

(2)　$\frac{x-y}{z}+\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}$

(3)　$a^2(b-c)-b^2(c-a)+c^2(a+b)-2abc$

(4)　$(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)$

■**発展**　$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$ を因数分解せよ.

☆これも地道に降べきの順に並べ替えればできるが, 次のような解法がある.

与式は交代式であるから, 因数として, $a-b$, $b-c$, $c-a$ をもつ.
次数を考えると, 与式は a についての 2 次式. (3 次式ではない. なぜならば $-a^3+a^3=0$ で 3 次の項は消える.)
ゆえに a , b , c に対する定数 k を用いて, 与式 $=k(b-c)(c-a)(a-b)$ と因数分解できる.
a^2 の係数を比較しよう. $\begin{cases} \text{与式の } a^2 \text{ の係数} \quad -3b^2+3c^2=-3(b^2-c^2) \\ k(b-c)(c-a)(a-b) \text{ の } a^2 \text{ の係数} \quad -kb^2+kc^2=-k(b^2-c^2) \end{cases}$
よって, $k=3$　⇒　与式 $=\boldsymbol{3(b-c)(c-a)(a-b)}$

☆この解法を用いると, 対称式・交代式の因数分解が早く解ける.