

整数問題 解答解説

1 整数の性質

1.1 最大公約数, 最小公倍数

- (1) $\frac{2}{7}$ を小数になおしたときの小数第 135 位の数字を求めよ.

$$\frac{2}{7} = 0.\dot{2}8571\dot{4}$$

$$135 = 6 \cdot 22 + 3 \Rightarrow 135 \text{ を } 6 \text{ で割ると余りが } 3$$

小数第 135 位の数字は 285714 の 3 つ目の数字となるので, 小数第 135 位の数字は **5** …答え

- (2) 75 を割っても, 129 を割っても余りが 3 になる自然数をすべて求めよ.

求める自然数を n とおく. ←★最重要 (求めるものを文字でおく)

題意から, 整数 a, b を用いると, ←★最重要 (条件を立式する)

$$75 = na + 3 \quad \text{かつ} \quad 129 = nb + 3$$

$$\Leftrightarrow 72 = na \quad \text{かつ} \quad 126 = nb$$

$\therefore n$ は 72 と 126 の公約数である. ←ここが☆ポイント

$\Leftrightarrow n$ は最大公約数 18 の約数.

ただし, 割る数は余りより大きいから $n > 3$ ←★重要 (文字の定義域を考える)

$$18 \text{ の約数は } 1, 2, 3, 6, 9, 18 \Rightarrow n > 3 \text{ より, } n = \mathbf{6, 9, 18} \quad \cdots \text{答え}$$

- (3) 7 で割ったら 6 余り, 5 で割ったら 4 余り, 3 で割ったら 2 余る最小の自然数を求めよ.

求める自然数を n とおく. ←★最重要 (求めるものを文字でおく)

題意から, 整数 a, b, c を用いると, ←★最重要 (条件を立式する)

$$n = 7a + 6 \quad \text{かつ} \quad n = 5b + 4 \quad \text{かつ} \quad n = 3c + 2$$

$\Rightarrow n + 1 = 7(a + 1) = 5(b + 1) = 3(c + 1)$ よって $n + 1$ は 7, 5, 3 の公倍数である. ←★最重要 (式の意味を考える)

$$3, 5, 7 \text{ の最小公倍数は } 105 \Rightarrow \text{最小の } n \text{ は, } n + 1 = 105 \Rightarrow n = \mathbf{104} \quad \cdots \text{答え}$$

- (4) 3 桁の自然数の中に 2 でも 3 でも 5 でも割り切れない自然数は何個あるか.

3 桁の自然数の集合を U とする.

U の部分集合 A, B, C を次のようにおく.

$$A = \{x \in U \mid x \text{ は } 2 \text{ の倍数}\}, B = \{x \in U \mid x \text{ は } 3 \text{ の倍数}\}, C = \{x \in U \mid x \text{ は } 5 \text{ の倍数}\}$$

$$n(U) = 999 - 100 + 1 = 900$$

$$A = \{100, 102, 104, \dots, 998\} \Rightarrow n(A) = (998 - 100) \div 2 + 1 = 450$$

$$B = \{102, 105, 108, \dots, 999\} \Rightarrow n(B) = (999 - 102) \div 3 + 1 = 300$$

$$C = \{100, 105, 110, \dots, 995\} \Rightarrow n(C) = (995 - 100) \div 5 + 1 = 180$$

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \text{ は } 6 \text{ の倍数}\} = \{102, 108, 114, \dots, 996\} \Rightarrow n(A \cap B) = (996 - 102) \div 6 + 1 = 150$$

$$B \cap C = \{x \in U \mid x \text{ は } 15 \text{ の倍数}\} = \{105, 120, 135, \dots, 990\} \Rightarrow n(B \cap C) = (990 - 105) \div 15 + 1 = 60$$

$$C \cap A = \{x \in U \mid x \text{ は } 10 \text{ の倍数}\} = \{100, 110, 120, \dots, 990\} \Rightarrow n(C \cap A) = (990 - 100) \div 10 + 1 = 90$$

$$A \cap B \cap C = \{x \in U \mid x \text{ は } 30 \text{ の倍数}\} = \{120, 150, 180, \dots, 990\} \Rightarrow n(A \cap B \cap C) = (990 - 120) \div 30 + 1 = 30$$

$$\Rightarrow n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - \{n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)\} + n(A \cap B \cap C)$$

$$= 450 + 300 + 180 - (150 + 60 + 90) + 30 = 930 - 300 + 30 = 660$$

$$\Rightarrow n(\overline{A \cup B \cup C}) = n(U) - n(A \cup B \cup C) = 900 - 660 = 240 \Rightarrow \mathbf{240 \text{ 個}} \quad \cdots \text{答え}$$

- (5) 7で割ると5余る自然数を a , 7で割ると6余る自然数を b とする. $a-b$ を7で割ると, 余りはいくつか.
(ただし, $a > b$ とする.)

題意から, 整数 m, n を用いると,

$$a = 7m + 5 \quad \text{かつ} \quad b = 7n + 6$$

$$\Rightarrow a - b = (7m + 5) - (7n + 6) = 7(m - n) - 1 = 7(m - n - 1) + 6 \quad \leftarrow \star$$

よって, 余りは **6** $\cdots$ **答え**

☆「7で割って余り-1」 $\Leftrightarrow$ 「7で割って余り6」

☆この問題は次の章の合同式を使うと早くできる.

- (6) ある105未満の自然数 x を3, 5, 7で割った余りをそれぞれ a, b, c とする. このとき, $70a + 21b + 15c$ を105で割った余りが x になることを証明せよ. (百五減算 (ひゃくごげんざん) 「塵劫記」参考)

☆江戸時代の和算の本「塵劫記」の中にてでくる有名な問題. 人の年齢をあてるために使われることが多い.

$$x = 3p + a = 5q + b = 7r + c \quad (p, q, r \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}) \quad \text{とおくと,} \quad \Rightarrow \quad a = x - 3p, \quad b = x - 5q, \quad c = x - 7r$$

これらを与式に代入すると,

$$70a + 21b + 15c = 70x - 210p + 21x - 105q + 15x - 105r = 106x - 210p - 105q - 105r = 105(x - 2p - q - r) + x$$

ゆえに, 与式を105で割ると余りが x になる.

- (7) 8633と9991の最小公倍数を求めよ.

★ユークリッドの互除法

A と B の最大公約数を見つたいとき, (ただし $A > B$)

$$A \div B = \text{商}_1 \cdots \text{余り}_1$$

$$B \div \text{余り}_1 = \text{商}_2 \cdots \text{余り}_2$$

$$\text{余り}_1 \div \text{余り}_2 = \text{商}_3 \cdots \text{余り}_3$$

$$\text{余り}_2 \div \text{余り}_3 = \text{商}_4 \cdots \text{余り}_4$$

余りが0になるまでこれを繰り返す.

$$9991 = 8633 \times 1 + 1358 \quad (9991 \text{ を } 8633 \text{ で割ると, 商 } 1, \text{ 余り } 1358)$$

$$8633 = 1358 \times 6 + 485 \quad (8633 \text{ を } 1358 \text{ で割ると, 商 } 6, \text{ 余り } 485)$$

$$1358 = 485 \times 2 + 388 \quad (1358 \text{ を } 485 \text{ で割ると, 商 } 2, \text{ 余り } 388)$$

$$485 = 388 \times 1 + 97 \quad (485 \text{ を } 388 \text{ で割ると, 商 } 1, \text{ 余り } 97)$$

$$388 = 97 \times 4 + 0 \quad (388 \text{ を } 97 \text{ で割ると, 商 } 4, \text{ 余り } 0 \sim \text{ 割り切れた})$$

よって最大公約数は97になる.

連除法によって,

$$\begin{array}{r} 97 \quad \quad 8633 \quad \quad 9991 \\ \quad \quad 89 \quad \quad 103 \end{array}$$

最小公倍数は, $97 \times 89 \times 103 = \mathbf{889199} \quad \cdots \text{答え}$

別解

☆9991が因数分解の公式を用いて, 素因数分解できることに着目する.

$$9991 = 10000 - 9 = 100^2 - 3^2 = (100 - 3)(100 + 3) = 97 \times 103$$

97も103も素数であるから, 9991の約数は1, 97, 103, 9991である. あとは8633が97か103で割り切れるか調べればよ

い.

- (8) 最大公約数が3, 最小公倍数が54となる2つの自然数をすべて求めよ.

★最大公約数と最小公倍数

A と B の最大公約数が $g \Rightarrow A = ga, B = gb$, a と b は互いに素
このとき, A と B の最小公倍数 l は gab と表せる.

2つの自然数を A, B とおく. ただし, $A \leq B$

題意から $A = 3a, B = 3b$ (a, b は整数で互いに素, $a \leq b$) とおけて,

$$3ab = 54 \Leftrightarrow ab = 18 = 2 \cdot 3^2$$

a	1	2	3
b	18	9	6

a, b が互いに素という条件から, $(a, b) = (1, 18), (2, 9) \Rightarrow (A, B) = (3, 54), (6, 27) \dots$ 答え

- (9) 最大公約数が3, 和が24となる2つの自然数をすべて求めよ.

2つの自然数を A, B とおく. ただし, $A \leq B$

題意から $A = 3a, B = 3b$ (a, b は整数で互いに素, $a \leq b$) とおけて,

$$3a + 3b = 24 \Leftrightarrow a + b = 8$$

a	1	2	3	4
b	7	6	5	4

a, b が互いに素という条件から, $(a, b) = (1, 7), (3, 5) \Rightarrow (A, B) = (3, 21), (9, 15) \dots$ 答え

- (10) 自然数 a, b があり, その最大公約数を g , 最小公倍数を l とする. $a^2 + b^2 + g^2 + l^2 = 1300$ のとき, 次の問いに答えよ.
ただし, $a > b$ とする.

- (i) $g > 1$ のとき, a と b の値を求めよ.

題意から, $a = gc, b = gd$ (c と d は互いに素な自然数で, 仮定より $c > d$) とおける.

l は最小公倍数であるから, $l = gcd$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + g^2 + l^2 &= (gc)^2 + (gd)^2 + g^2 + (gcd)^2 \\ &= g^2c^2 + g^2d^2 + g^2 + g^2cd^2 = g^2(1 + c^2 + d^2 + c^2d^2) = g^2(1 + c^2)(1 + d^2) \end{aligned}$$

$$1300 = 2^2 \times 5^2 \times 13 \text{ より,}$$

$$g^2(1 + c^2)(1 + d^2) = 2^2 \times 5^2 \times 13 \dots \textcircled{1}$$

$\Rightarrow g$ は自然数で, $g > 1$ であるから, $g = 2, 5, 10$ である.

$$(\text{ア}) \quad g = 2 \text{ のとき, } \textcircled{1} \Leftrightarrow (1 + c^2)(1 + d^2) = 5^2 \times 13$$

$$\Rightarrow 1 + c^2 = 65, 1 + d^2 = 5 \Rightarrow c = 8, d = 2 \text{ しかし, これは互いに素ではないので矛盾}$$

$$(\text{イ}) \quad g = 5 \text{ のとき, } \textcircled{1} \Leftrightarrow (1 + c^2)(1 + d^2) = 2^2 \times 13$$

$$\Rightarrow 1 + c^2 = 26, 1 + d^2 = 2 \Rightarrow c = 5, d = 1$$

$$(\text{ウ}) \quad g = 10 \text{ のとき, } \textcircled{1} \Leftrightarrow (1 + c^2)(1 + d^2) = 13$$

$$\Rightarrow 1 + c^2, 1 + d^2 > 1 \text{ より, この式を満たす自然数 } c, d \text{ はない.}$$

$$(\text{ア}) \sim (\text{ウ}) \text{ から, } c = 5 \text{ かつ } d = 1 \Rightarrow a = gc = 5 \times 5 = 25, b = gd = 5 \times 1 = 5 \Rightarrow (a, b) = (25, 5) \dots$$
 答え

$$\star \text{確かめ} \quad 25^2 + 5^2 + 5^2 + 25^2 = 1300$$

- (ii) $g = 1$ のとき, a と b の値を求めよ.

$g = 1$ のとき, (1) の① から,

$$(1 + c^2)(1 + d^2) = 2^2 \times 5^2 \times 13$$

$1 + c^2$	1300	650	325	260	130	100	65	52	50
$1 + d^2$	1	2	4	5	10	13	20	25	26

⇒

c^2	1299	649	324	259	129	99	64	51	49
d^2	0	1	3	4	9	12	19	24	25

$$\therefore c, d \text{ は自然数であるから } (c^2, d^2) = (49, 25) \Rightarrow (c, d) = (7, 5)$$

$$\text{よって, } a = gc = 1 \times 7 = 7, \quad b = gd = 1 \times 5 = 5 \Rightarrow (a, b) = (7, 5) \quad \dots \text{答え}$$

$$\star \text{確かめ} \quad 7^2 + 5^2 + 1^2 + 35^2 = 1300$$

1.2 合同式 (mod)

(1) 3^{103} を 10 で割ったときの余りを求めよ.

★合同式

$$x \text{ を } m \text{ で割った余り } a \Leftrightarrow x \equiv a \pmod{m}$$

$$3 \equiv 3 \pmod{10}$$

$$3^2 \equiv 3 \cdot 3 \equiv 9 \pmod{10}$$

$$3^3 \equiv 9 \cdot 3 \equiv 7 \pmod{10}$$

$$3^4 \equiv 7 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{10}$$

$$\therefore 3^{103} \equiv 3^4 \cdot 25+3 \equiv (3^4)^{25} \cdot 3^3 \equiv 1^{25} \cdot 7 \equiv 7 \quad \dots \text{答え}$$

(2) 3^{103} を 7 で割ったときの余りを求めよ.

$$3 \equiv 3 \pmod{7}$$

$$3^2 \equiv 3 \cdot 3 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$3^3 \equiv 2 \cdot 3 \equiv 6 \pmod{7}$$

$$3^4 \equiv 6 \cdot 3 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$3^5 \equiv 4 \cdot 3 \equiv 5 \pmod{7}$$

$$3^6 \equiv 5 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$\therefore 3^{103} \equiv 3^6 \cdot 17+1 \equiv (3^6)^{17} \cdot 3 \equiv 1^{17} \cdot 3 \equiv 3 \quad \dots \text{答え}$$

(3) $p, 2p+1, 4p+1$ が素数であるとき, その素数 p を全て求めよ.

★まず手を動かせ ★1, 2, 3 で考えろ

まずは素数を小さい順に調べてみる.

素数 p	$2p+1$	$4p+1$	適・不適
2	5	9	×
3	7	13	○
5	11	21	×
7	15	29	×
11	23	45	×

調べてみると答えは 3 であると推測できる. それ以外の場合は $2p+1$ か $4p+1$ のどちらかが 3 で割り切れることに気がつければ以下の場合分けは難しくない.

解答

素数 p に対して, 3 で割った余りについての合同式を考えると,

$$p \equiv 0, 1, 2 \pmod{3} \quad \text{の 3 通りしかない. 以下 } \pmod{3} \text{ とする.}$$

$$p \equiv 1 \text{ のとき } \quad 2p+1 \equiv 0, \quad 4p+1 \equiv 2 \quad \text{すなわち, } p \text{ が 3 で割って 1 余るとき, } 2n+1 \text{ は必ず 3 で割り切れる}$$

$$p \equiv 2 \text{ のとき } \quad 2p+1 \equiv 2, \quad 4p+1 \equiv 0 \quad \text{すなわち, } p \text{ が 3 で割って 2 余るとき, } 4n+1 \text{ は必ず 3 で割り切れる}$$

よって, $p \equiv 0$ 以外のとき, $2p+1$, $4p+1$ が共に素数になることはない.

$p \equiv 0$ を満たす素数 p は 3 だけであり, そのとき, $2p+1=7$, $4p+1=13$ となって共に素数である.

$$p=3 \quad \cdots \text{答え}$$

- (4) 2 以上の自然数 n に対して, n と n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限ることを示せ.

☆前問の類題といえる.

解答

自然数 n に対して, 3 で割った余りについての合同式を考えると,

$$n \equiv 0, 1, 2 \pmod{3} \quad \text{の 3 通りしかない. 以下 } \pmod{3} \text{ とする.}$$

$$n \equiv 1 \text{ のとき } \quad n^2+2 \equiv 0 \quad \text{すなわち, } n \text{ が 3 で割って 1 余るとき, } n^2 \text{ は必ず 3 で割り切れる}$$

$$n \equiv 2 \text{ のとき } \quad n^2+2 \equiv 0 \quad \text{すなわち, } n \text{ が 3 で割って 2 余るとき, } n^2 \text{ は必ず 3 で割り切れる}$$

よって, $n \equiv 0$ 以外のとき, n^2+2 が素数になることはない.

$n \equiv 0$ を満たす素数 n は 3 だけであり, そのとき, $n^2+2=11$ となって素数である. $\langle Q.E.D \rangle$

2 式の変形

2.1 不定方程式

- (1) $18x=24y$ を満たす整数 (x, y) の組をすべて求めよ.

★不定方程式の解き方 1

$$18x=24y \quad \Leftrightarrow \quad 3x=4y$$

整数 n を用いて, $3x=4y=n$ とおける. $\cdots \textcircled{1}$

この式から n は 3 と 4 の公倍数であるから, 最小公倍数 12 の倍数といえるので,

整数 m を用いて, $n=12m$ とする.

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow 3x=4y=12m \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=12m & \Leftrightarrow x=4m \\ 4y=12m & \Leftrightarrow y=3m \end{cases}$$

$\therefore (x, y) = (4m, 3m) \quad \text{ただし, } m \text{ は整数.}$

- (2) $85x+51y=1700$ を満たす整数 (x, y) の組をすべて求めよ.

★不定方程式の解き方 2

$$85x+51y=1700 \quad \Leftrightarrow \quad 5x+3y=100 \quad \Leftrightarrow \quad 3y=5(20-x)$$

整数 n を用いて, $3y=5(20-x)=n$ とおける. $\cdots \textcircled{1}$

この式から n は 3 と 5 の公倍数であるから、最小公倍数 15 の倍数といえるので、
整数 m を用いて、 $n = 15m$ とする。

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \Leftrightarrow 3y = 5(20 - x) = 15m \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 5(20 - x) = 15m & \Leftrightarrow 20 - x = 3m & \Leftrightarrow x = 20 - 3m \\ 3y = 15m & \Leftrightarrow y = 5m \end{cases} \\ & \therefore (x, y) = (20 - 3m, 5m) \quad \text{ただし, } m \text{ は整数.} \end{aligned}$$

(3) $5x + 3y = 37$ を満たす整数 x, y に対して、 $z = \frac{x-y}{x+y}$ とする。 z が整数であるとき、整数 (x, y) の組をすべて求めよ。

★不定方程式の解き方 3

$$5x + 3y = 37 \quad \Leftrightarrow \quad 5x + 3y = 10 + 27 \quad \Leftrightarrow \quad 3y - 27 = 10 - 5x \quad \Leftrightarrow \quad 3(y - 9) = 5(2 - x)$$

整数 n を用いて、 $3(y - 9) = 5(2 - x) = n$ とおける。 …①

この式から n は 3 と 5 の公倍数であるから、最小公倍数 15 の倍数といえるので、
整数 m を用いて、 $n = 15m$ とする。

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \Leftrightarrow 3(y - 9) = 5(2 - x) = 15m \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 5(2 - x) = 15m & \Leftrightarrow 2 - x = 3m & \Leftrightarrow x = 2 - 3m \\ 3(y - 9) = 15m & \Leftrightarrow y - 9 = 5m & \Leftrightarrow y = 5m + 9 \end{cases} \\ & \therefore (x, y) = (2 - 3m, 5m + 9) \quad \text{ただし, } m \text{ は整数.} \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} z &= \frac{x-y}{x+y} = \frac{(2-3m)-(5m+9)}{(2-3m)+(5m+9)} = \frac{-8m-7}{2m+11} \\ &= \frac{-4(2m+11)+37}{2m+11} \quad \leftarrow \text{★分数式の帯分数化} \\ &= -4 + \frac{37}{2m+11} \end{aligned}$$

z が整数 $\Rightarrow 2m+11$ が 37 の約数

37 は素数であるから、 $2m+11 = \pm 1$ または $2m+11 = \pm 37$

$\Rightarrow m = -24, -6, -5, 13 \Rightarrow (x, y) = (74, -111), (20, -21), (17, -16), (-37, 74) \quad \dots \text{答え}$

2.2 因数分解

(1) $25!$ を素因数分解せよ。

$$25 = 2 \cdot 12 + 1 \quad 25 = 2^2 \cdot 6 + 1 \quad 25 = 2^3 \cdot 3 + 1 \quad 25 = 2^4 \cdot 1 + 9 \quad \Rightarrow \quad 25! \text{ は } 2^{12+6+3+1} = 2^{22} \text{ で割り切れる}$$

$$25 = 3 \cdot 8 + 1 \quad 25 = 3^2 \cdot 2 + 7 \quad \Rightarrow \quad 25! \text{ は } 3^{8+2} = 3^{10} \text{ で割り切れる}$$

同様にして、

$$\begin{aligned} 25! &= 2^{22} \cdot 3^{10} \cdot 5^{5+1} \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \\ &= 2^{22} \cdot 3^{10} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \quad \dots \text{答え} \end{aligned}$$

(2) $50!$ は末尾に 0 がいくつ並ぶか。

$$50 = 2 \cdot 25 \quad 50 = 2^2 \cdot 12 + 1 \quad 50 = 2^3 \cdot 6 + 2 \quad 50 = 2^4 \cdot 3 + 2 \quad 50 = 2^6 \cdot 1 + 18$$

$$50 = 5 \cdot 10 \quad 50 = 5^2 \cdot 2$$

よって、 $50!$ は、 $2^{25+12+6+3+1}$ で割り切れ、かつ 5^{10+2} で割り切れる。

$10 = 2 \cdot 5$ であるから、 $50!$ の末尾に 0 が **12 個** 並ぶ。 …答え

(3) 96 の正の約数の個数と、正の約数の総和を求めよ。

★素因数分解と約数

$$96 = 2^5 \cdot 3^1$$

⇒ 96 の約数は $2^0 \sim 5 \cdot 3^0 \sim 1$ と表せる.

★約数の個数

$\begin{cases} \text{素因数 } 2 \text{ の次数が } 0 \sim 5 & \Rightarrow 5 + 1 = 6 \text{ 通り} \\ \text{素因数 } 3 \text{ の次数が } 0 \sim 1 & \Rightarrow 1 + 1 = 2 \text{ 通り} \end{cases} \Rightarrow \text{約数の個数は } 6 \cdot 2 = 12 \text{ 個} \quad \dots \text{答え}$

★約数の総和

$$\begin{aligned} & (2^0 \cdot 3^0 + 2^1 \cdot 3^0 + 2^2 \cdot 3^0 + 2^3 \cdot 3^0 + 2^4 \cdot 3^0 + 2^5 \cdot 3^0) \\ & + (2^0 \cdot 3^1 + 2^1 \cdot 3^1 + 2^2 \cdot 3^1 + 2^3 \cdot 3^1 + 2^4 \cdot 3^1 + 2^5 \cdot 3^1) \\ & = (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) \cdot 3^0 + (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) \cdot 3^1 \\ & = (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) \cdot (3^0 + 3^1) \quad \leftarrow \star 2^5 \cdot 3^1 \text{ と因数分解できたときの約数の総和の公式} \\ & = (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32) \cdot (1 + 3) = 63 \cdot 4 = 252 \quad \dots \text{答え} \end{aligned}$$

(4) 504 の正の約数の個数と、正の約数の総和を求めよ.

★素因数分解と約数

$$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^1$$

⇒ 504 の約数は $2^0 \sim 3 \cdot 3^0 \sim 2 \cdot 7^0 \sim 1$ と表せる.

★約数の個数

$\begin{cases} \text{素因数 } 2 \text{ の次数が } 0 \sim 3 & \Rightarrow 3 + 1 = 4 \text{ 通り} \\ \text{素因数 } 3 \text{ の次数が } 0 \sim 2 & \Rightarrow 2 + 1 = 3 \text{ 通り} \\ \text{素因数 } 7 \text{ の次数が } 0 \sim 1 & \Rightarrow 1 + 1 = 2 \text{ 通り} \end{cases} \Rightarrow \text{約数の個数は } 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \text{ 個} \quad \dots \text{答え}$

★約数の総和

$$(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3) \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2) \cdot (7^0 + 7^1) = 15 \cdot 13 \cdot 8 = 1560 \quad \dots \text{答え}$$

(5) 2 ケタの自然数の中で、正の約数が 3 個であるものをすべて書き並べよ.

★約数の個数

自然数 n の素因数分解が、 $n = a^p \cdot b^q \cdot c^r \cdot \dots$ ($a, b, c \in \text{素数}$ $p, q, r \in \text{自然数}$) と表せるとき、約数の個数は $(p+1)(q+1)(r+1)\dots$ である.

つまり、約数の個数が 3 個であるということは、 $(p+1)(q+1)(r+1)\dots = 3$

しかし、3 は素数であるから、 $p+1=3$ かつ $q=r=\dots=0$

よって、次のことが言える.

★自然数 n の正の約数の個数が 3 個 $\Leftrightarrow n = a^2$ (ただし、 a は素数)

以上から、2 桁の自然数で約数が 3 個であるものは、 $5^2, 7^2 \Rightarrow 25, 49 \quad \dots \text{答え}$

(6) 2 ケタの自然数の中で、正の約数が 8 個であるものは何個あるか.

★約数の個数

自然数 n の素因数分解が、 $n = a^p \cdot b^q \cdot c^r \cdot \dots$ ($a, b, c \in \text{素数}$ $p, q, r \in \text{自然数}$) と表せるとき、約数の個数は $(p+1)(q+1)(r+1)\dots$ である.

よって、求める 2 桁の自然数を n とすると、

$$\text{素数 } a, b, c \text{ に対して } \begin{cases} \textcircled{1} & n = a^1 \cdot b^1 \cdot c^1 \\ \textcircled{2} & n = a^3 \cdot b^1 \\ \textcircled{3} & n = a^7 \end{cases}$$

① $2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 11, 2 \cdot 3 \cdot 13, 2 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow 5$ 個

② $2^3 \cdot 3, 2^3 \cdot 5, 2^3 \cdot 7, 2^3 \cdot 11, 3^3 \cdot 2 \Rightarrow 5$ 個

③ $2^7 = 128 \geq 100 \Rightarrow 0$ 個

$\therefore 5 + 5 + 0 = 10$ 個 …答え

(7) $\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1$ を満たす自然数の組 (a, b) を求めよ.

★文字式と整数 「因数分解 = 素因数分解」の形にする.

題意から a も b も 0 ではないから, 与式を ab 倍して,

与式 $\Leftrightarrow 2b + 3a = ab \Leftrightarrow ab - 3a - 2b = 0 \Leftrightarrow (a - 2)(b - 3) = 6$

$a \geq 1, b \geq 1 \Leftrightarrow a - 2 \geq -1, b - 3 \geq -2$

$\therefore (a - 2, b - 3) = (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$

$\Leftrightarrow (a, b) = (3, 9), (4, 6), (5, 5), (8, 4)$ …答え

☆別解

題意から $\frac{2}{a} > 0$ かつ $\frac{3}{b} > 0$

よって与式から $\frac{3}{b} = 1 - \frac{2}{a} > 0$ かつ $\frac{2}{a} = 1 - \frac{3}{b} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{a} < 1$ かつ $\frac{3}{b} < 1$

$\Leftrightarrow a > 2$ かつ $b > 3 \Rightarrow a = 3, 4, 5, \dots$ について調べればよい.

(8) x, y が正の整数であるとき, $2x^2 + 7xy + 6y^2 - 104 = 0$ を解け.

★文字式と整数 「因数分解 = 素因数分解」の形にする.

$2x^2 + 7xy + 6y^2 - 104 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 7xy + 6y^2 = 104 \Leftrightarrow (x + 2y)(2x + 3y) = 2^3 \cdot 13$

x, y が正の整数であるから, $x + 2y < 2x + 3y$

$\Rightarrow (x + 2y, 2x + 3y) = (1, 104), (2, 52), (4, 26), (8, 13) \leftarrow$ このとき約数の個数を考えて確認

$\Rightarrow (x, y) = (205, -102), (98, -48), (40, -18), (2, 3) \Rightarrow x, y$ は正の整数であるから, $(x, y) = (2, 3)$ …答え

(9) $x^2 + mx + m - 6 = 0$ が整数解 x をもつとき, m の値を求めよ.

★2次整式と整数 因数分解と判別式と解と係数の関係の利用

$D = m^2 - 4(m - 6) = m^2 - 4m + 24 = (m - 2)^2 + 20 > 0$

よって, $x^2 + mx + m - 6 = 0$ は異なる2つの実数解をもつ. これを, $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とする. …①

解と係数の関係から, $\alpha + \beta = -m$ かつ $\alpha\beta = m - 6$ ここから m を消去して,

$\alpha\beta = -(\alpha + \beta) - 6 \Leftrightarrow \alpha\beta + \alpha + \beta = -6 \Leftrightarrow (\alpha + 1)(\beta + 1) = -5 \leftarrow \star$ 因数分解

ゆえに $(\alpha + 1, \beta + 1) = (-5, 1), (-1, 5) \Rightarrow (\alpha, \beta) = (-6, 0), (-2, 4) \Rightarrow m = 6, -2$ …答え

☆別解

与方程式 $\Leftrightarrow m(x + 1) = 6 - x^2$

$x + 1 = 0$ のとき, $x^2 + mx + m - 6 = -5 \neq 0$ より題意に不適当だから,

$x + 1 \neq 0$ としてよく, $m = \frac{6 - x^2}{x + 1} = -x + 1 + \frac{5}{x + 1}$ …②

①より, $m = -(\alpha + \beta)$ となつて, これは整数である.

$m, -x + 1$ は整数なので, ②から $x + 1$ は5の約数.

$\therefore x + 1 = -5, -1, 1, 5 \Leftrightarrow x = -6, -2, 0, 4 \Rightarrow m = -2, 6$

3 不等式

3.1 範囲の決定

- (1) $1 \leq x^2 - 4x - 2 \leq 12$ を満たす整数解 x を求めよ.

題意から ① $x^2 - 4x - 2 \geq 1$ かつ ② $x^2 - 4x - 2 \leq 12$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow x^2 - 4x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 - \sqrt{7} \text{ または } 2 + \sqrt{7} \leq x$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow x^2 - 4x - 14 \leq 0 \Leftrightarrow 2 - 3\sqrt{2} \leq x \leq 2 + 3\sqrt{2}$$

$$\therefore 2 - 3\sqrt{2} \leq x \leq 2 - \sqrt{7} \text{ または } 2 + \sqrt{7} \leq x \leq 2 + 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x = 2 - 4, 2 - 3, 2 + 3, 2 + 4 \Rightarrow x = -2, -1, 5, 6 \quad \cdots \text{答え}$$

- (2) $x^2 + y^2 = 4x$ の整数解 (x, y) を求めよ.

$$\text{与式} \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 4$$

$$(x - 2)^2 \geq 0 \text{ かつ } y^2 \geq 0 \text{ より, } ((x - 2)^2, y^2) = (0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)$$

$$x - 2, y \text{ ともに整数であるから, } ((x - 2)^2, y^2) = (0, 4), (4, 0)$$

$$\Leftrightarrow (x - 2, y) = (0, \pm 2), (\pm 2, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (2, 2), (2, -2), (4, 0), (0, 0) \quad \cdots \text{答え}$$

- (3) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ を満たす自然数の組 (a, b, c) を求めよ.

変数の対称性から, $a \leq b \leq c$ としても一般性を保たれる.

$$\text{題意から, } 0 < a \leq b \leq c \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{3}{a}$$

$$\therefore 1 \leq \frac{3}{a} \Leftrightarrow a \leq 3$$

a は自然数であるから, $a = 1, 2, 3$ の何れかである.

$$\textcircled{1} \quad a = 1 \text{ のとき, } \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$$

しかし, $\frac{1}{b}, \frac{1}{c} > 0 \Rightarrow$ 自然数解 b, c はない.

$$\textcircled{2} \quad a = 2 \text{ のとき, } \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{b} \geq \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{2}{b}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq \frac{2}{b} \Leftrightarrow b \leq 4$$

$$a \leq b \text{ より, } 2 \leq b \leq 4 \Rightarrow b = 2, 3, 4$$

$\begin{cases} b = 2 \text{ のとき, } \frac{1}{c} = 0 \text{ を満たす自然数 } c \text{ がないので, 不適当.} \\ b = 3 \text{ のとき, } \frac{1}{c} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow (a, b, c) = (2, 3, 6) \text{ これは条件を満たす} \\ b = 4 \text{ のとき, } \frac{1}{c} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow (a, b, c) = (2, 4, 4) \text{ これも条件を満たす} \end{cases}$

$$\textcircled{3} \quad a = 3 \text{ のとき, } \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{b} \geq \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{2}{b}$$

$$\therefore \frac{2}{3} \leq \frac{2}{b} \Leftrightarrow b \leq 3$$

$$a \leq b \text{ より, } 3 \leq b \leq 3 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow (a, b, c) = (3, 3, 3) \text{ これも条件を満たす}$$

以上から, $a \leq b \leq c$ のとき, $(a, b, c) = (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$ が題意を満たす.

$a \leq b \leq c$ の条件をとって, それぞれの並べ替えを考えると,

$$(a, b, c) = (2, 3, 6), (2, 6, 3), (3, 2, 6), (3, 6, 2), (6, 2, 3), (6, 3, 2), (2, 4, 4), (4, 2, 4), (4, 4, 2), (3, 3, 3) \quad \cdots \text{答え}$$

3.2 ガウス記号

(1) $[x]$ を、 x を超えない最大の整数とする.

★ガウス記号

$[x]$ means the greatest integer less than or equal to x .

性質 $[x] \leq x < [x] + 1$

☆いろいろな性質があるが、これさえおさえておけばどうにかなる.

(i) $\frac{14}{3} < x < 5$ のとき, $\left[\frac{3x}{7}\right] - \left[\frac{3[x]}{7}\right]$ を求めよ.

$$\begin{cases} \frac{14}{3} < x < 5 \Rightarrow 14 < 3x < 15 \Rightarrow 2 < \frac{3x}{7} < \frac{15}{7} \Rightarrow \left[\frac{3x}{7}\right] = 2 \\ \frac{14}{3} < x < 5 \Rightarrow [x] = 4 \Rightarrow \left[\frac{3[x]}{7}\right] = \left[\frac{3 \cdot 4}{7}\right] = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{与式} = 2 - 1 = 1 \quad \cdots \text{答え}$$

(ii) n を自然数とする. あらゆる実数 x に対して, $\left[\frac{x}{n}\right] - \left[\frac{[x]}{n}\right]$ を求めよ.

整数 a に対して, $\left[\frac{x}{n}\right] = a$ とおく. $\leftarrow$ ★ガウス記号の性質 $[x] \leq x < [x] + 1$

$\Rightarrow a \leq \frac{x}{n} < a + 1 \Rightarrow na \leq x < na + n \Rightarrow [x] = na, na + 1, na + 2, \dots, na + n - 1$

$0 \leq t < n$ を満たす整数 t を用いて, $[x] = na + t$ とおける.

このとき, $0 \leq \frac{t}{n} < 1$ であるから, 与式 $= a - \left[\frac{na+t}{n}\right] = a - \left[a + \frac{t}{n}\right] = a - a = 0 \quad \cdots \text{答え}$

(2) $[x]$ を、 x を超えない最大の整数とする. $4[x^2] - 36[x] + 45 < 0$ を満たす x の範囲を求めよ.

☆方針をたてにくいけど、**だいたい**の答えは簡単にわかる. $\leftarrow$ ★だいたいを考えろ

$$4x^2 - 36x + 45 < 0 \Leftrightarrow (2x - 3)(2x - 15) < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} < x < \frac{15}{2}$$

ということは, $[x] = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ であろうと推測できる.

解答

$$4[x^2] - 36[x] + 45 < 0 \quad \cdots \text{①}$$

まず, $[x] \leq 1$ ではないことを証明する. $\leftarrow$ ☆

もしも, $[x] \leq 1$ と仮定すると $\begin{cases} x^2 \geq 0 \Rightarrow 4[x^2] \geq 0 \\ -36[x] \geq -36 \end{cases} \Rightarrow \text{左辺} = 0 - 36 + 45 > 0$ となり矛盾. ゆえに背理法から $[x] \geq 2$

2 以上の整数 a に対して, $[x] = a$ とおく. $\leftarrow$ ★ガウス記号の性質 $[x] \leq x < [x] + 1$

$$\Rightarrow a \leq x < a + 1 \Rightarrow a^2 \leq x^2 < a^2 + 2a + 1$$

$$\therefore 4[x^2] - 36[x] + 45 \geq 4a^2 - 36a + 45 = (2a - 3)(2a - 15)$$

少なくともこれが 0 より小でなくてはならないので, $\frac{3}{2} < a < \frac{15}{2}$

a は整数だから, $a = 2, 3, 4, 5, 6, 7$

$$\begin{aligned} \textcircled{7} \quad a = 2 \text{ のとき} \quad & \begin{cases} a = 2 \text{ なので, } a^2 \leq x^2 \Rightarrow 4 \leq x^2 \\ \textcircled{1} \Leftrightarrow 4[x^2] - 36 \cdot 2 + 45 < 0 \Leftrightarrow [x^2] < \frac{27}{4} \end{cases} \\ \therefore [x^2] = 4, 5, 6 \quad & \Rightarrow 4 \leq x^2 < 7 \Rightarrow 2 \leq x < \sqrt{7} \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \quad a = 3 \text{ のとき} \quad \begin{cases} a = 3 \text{ なので, } a^2 \leq x^2 \Rightarrow 9 \leq x^2 \\ \textcircled{1} \Leftrightarrow 4[x^2] - 36 \cdot 3 + 45 < 0 \Leftrightarrow [x^2] < \frac{63}{4} \end{cases}$$

$$\therefore [x^2] = 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 \Rightarrow 9 \leq x^2 < 16 \Rightarrow 3 \leq x < 4$$

$$\begin{aligned} \textcircled{ウ} \quad a = 4 \text{ のとき} \quad & \begin{cases} a = 4 \text{ なので, } a^2 \leq x^2 \Rightarrow 16 \leq x^2 \\ \textcircled{①} \Leftrightarrow 4[x^2] - 36 \cdot 4 + 45 < 0 \Leftrightarrow [x^2] < \frac{99}{4} \end{cases} \\ \therefore [x^2] = 16, 17, 18, \dots, 24 \Rightarrow 16 \leq x^2 < 25 \Rightarrow 4 \leq x < 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{エ} \quad a = 5 \text{ のとき} \quad & \begin{cases} a = 5 \text{ なので, } a^2 \leq x^2 \Rightarrow 25 \leq x^2 \\ \textcircled{①} \Leftrightarrow 4[x^2] - 36 \cdot 5 + 45 < 0 \Leftrightarrow [x^2] < \frac{135}{4} \end{cases} \\ \therefore [x^2] = 25, 26, 27, \dots, 33 \Rightarrow 25 \leq x^2 < 34 \Rightarrow 5 \leq x < \sqrt{34} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{オ} \quad a = 6 \text{ のとき} \quad & \begin{cases} a = 6 \text{ なので, } a^2 \leq x^2 \Rightarrow 36 \leq x^2 \\ \textcircled{①} \Leftrightarrow 4[x^2] - 36 \cdot 6 + 45 < 0 \Leftrightarrow [x^2] < \frac{171}{4} \end{cases} \\ \therefore [x^2] = 36, 37, 38, \dots, 42 \Rightarrow 36 \leq x^2 < 43 \Rightarrow 6 \leq x < \sqrt{43} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{カ} \quad a = 7 \text{ のとき} \quad & \begin{cases} a = 7 \text{ なので, } a^2 \leq x^2 \Rightarrow 49 \leq x^2 \\ \textcircled{①} \Leftrightarrow 4[x^2] - 36 \cdot 7 + 45 < 0 \Leftrightarrow [x^2] < \frac{207}{4} \end{cases} \\ \therefore [x^2] = 49, 50, 51 \Rightarrow 49 \leq x^2 < 52 \Rightarrow 7 \leq x < 2\sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\textcircled{ア} \sim \textcircled{カ} \text{ をまとめると, } \quad 2 \leq x < \sqrt{7} \text{ 又は } 3 \leq x < \sqrt{34} \text{ 又は } 6 \leq x < \sqrt{43} \text{ 又は } 7 \leq x < 2\sqrt{13} \quad \dots \text{答え}$$

☆このあとの論証で、負の数を考えると場合分けが面倒である。なのでここで負の数を排除したい。だから 0 以下ではないことを証明した。別に、2 乗するときに負の数について場合分けして論証してもかまわない。

4 総合

- (1) 3以上の素数 p に対して、整数 a, b, c, d が、
 $a \geq b \geq c \geq d$ かつ $a+b+c+d=0$ かつ $ad-bc+p=0$
 を満たすとき、整数 a, b, c, d を p で表せ.

★ 整数問題 3つの解法を中心に考えよう.

解法① 整数の性質 解法② 因数分解 解法③ 不等式

解答

☆方程式をみたら、文字を消去して、解法②を考えよう.

☆整数問題の方程式では、符号が「+」になるような式変形が有効.

$$a+b+c+d=0 \Leftrightarrow d=-a-b-c \quad \cdots \textcircled{1}$$

①を $ad-bc+p=0$ に代入して、

$$a(-a-b-c)-bc+p=0 \Leftrightarrow p=a^2+ab+ac+bc \Leftrightarrow p=(a+b)(a+c)$$

$b \geq c$ より、 $a+b \geq a+c$ であり、 p は素数であるから次の②と③が考えられる.

$$\begin{cases} \textcircled{2} & a+b=p \quad \text{かつ} \quad a+c=1 \\ \textcircled{3} & a+b=-1 \quad \text{かつ} \quad a+c=-p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \textcircled{2} & b=p-a \quad \text{かつ} \quad c=1-a \\ \textcircled{3} & b=-1-a \quad \text{かつ} \quad c=-p-a \end{cases}$$

☆まだ使っていない条件を考える.

②のとき、

$$a \geq b \geq c \geq d \text{ に } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を代入して, } \begin{cases} a \geq b \Leftrightarrow a \geq p-a & \Leftrightarrow a \geq \frac{p}{2} \\ b \geq c \Leftrightarrow p-a \geq 1-a & \Leftrightarrow p \geq 1 \quad (\text{あらゆる } a \text{ で成立}) \\ c \geq d \Leftrightarrow 1-a \geq -a-(p-a)-(1-a) & \Leftrightarrow a \leq \frac{p+2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{2} \leq a \leq \frac{p+2}{2}$$

p は3以上の素数であるから奇数. つまり $\frac{p}{2}$ と $\frac{p+2}{2}$ の間には整数が1個しかない.

$$\therefore a = \frac{p+1}{2} \Rightarrow b = \frac{p-1}{2}, \quad c = \frac{-p+1}{2}, \quad d = \frac{-p-1}{2}$$

③のとき、

$$a \geq b \geq c \geq d \text{ に } \textcircled{1}, \textcircled{3} \text{ を代入して, } \begin{cases} a \geq b \Leftrightarrow a \geq -1-a & \Leftrightarrow a \geq -\frac{1}{2} \\ b \geq c \Leftrightarrow -1-a \geq -p-a & \Leftrightarrow p \geq 1 \quad (\text{あらゆる } a \text{ で成立}) \\ c \geq d \Leftrightarrow -p-a \geq -a-(-1-a)-(-p-a) & \Leftrightarrow a \leq \frac{-2p-1}{2} \quad \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

$$p \geq 3 \text{ より, } \textcircled{4} \Rightarrow a \leq \frac{-2p-1}{2} < 0$$

しかし、 $a \geq b \geq c \geq d$ かつ $a+b+c+d=0$ より、 $a > 0$ である. ($\therefore$ もし $a < 0$ ならば a, b, c, d は全て負となり矛盾)

これらは矛盾するので③は不適当である.

$$\therefore a = \frac{p+1}{2}, \quad b = \frac{p-1}{2}, \quad c = \frac{-p+1}{2}, \quad d = \frac{-p-1}{2} \quad \cdots \text{答え}$$

(2) 自然数 n に対して、 $2^n + 3^{n+1}$ と $2^{n+1} + 3^n$ が互いに素になることを証明せよ.

★ 整数問題 3つの解法を中心に考えよう.

解法① 整数の性質

解法② 因数分解

解法③ 不等式

ここでは解法①を中心に考える.

解法

以下、 A と B が互いに素であることを $A \perp B$ と表す.

★ 互いに素の性質 整数 x, y, z に対して次が成立する.

定理㉗ $x \perp y$ かつ $x \perp z \iff x \perp yz$

定理㉘ $x \perp y \iff (x + yz) \perp y$

㉗の十分性 x と yz が共通な素因数 p をもつとすると、 y, z のどちらかが p で割り切れるので矛盾.

㉗の必要性 対偶を考えると、 x は y, z のどちらかと共通な素因数 p をもつので、 yz も p で割り切れる.

㉘の十分性 $x + yz = p\alpha$, $y = p\beta$ (p は素数, α, β は整数) と仮定すると、 $x = p(\alpha - z\beta)$ となり矛盾.

㉘の必要性 対偶を考えると、 x と y が共通な素因数 p をもつので、 $x + yz$ も p で割り切れる.

㉗から、次が言える.

定理㉙ 自然数 m, n に対して、 $x \perp y \iff x^m \perp y^n$

$$2 \perp 3$$

$$\iff 2 \perp 3^n \quad \leftarrow \because \text{㉙}$$

$$\iff 2 \cdot 2^n + 3^n \perp 2 \quad \leftarrow \because \text{㉘で, } x = 3^n, y = 2, z = 2^n$$

$$\iff 2 \perp 2^{n+1} + 3^n \quad \cdots \text{㉔}$$

$$2^n + 3^{n+1} \perp 2^{n+1} + 3^n$$

$$\iff 2(2^n + 3^{n+1}) \perp 2^{n+1} + 3^n \quad \leftarrow \because \text{㉗と㉔}$$

$$\iff 2^{n+1} + 6 \cdot 3^n \perp 2^{n+1} + 3^n$$

$$\iff 5 \cdot 3^n \perp 2^{n+1} + 3^n \quad \leftarrow \because \text{㉘で, } x = 2^{n+1} + 6 \cdot 3^n, y = 2^{n+1} + 3^n, z = -1$$

$$\iff 5 \perp 2^{n+1} + 3^n \text{ かつ } 3^n \perp 2^{n+1} + 3^n \quad \leftarrow \because \text{㉗}$$

$3^n \perp 2^{n+1} + 3^n$ は㉔と同様に言える.

よって、次を証明すればよい.

$$\textcircled{オ} \quad 5 \perp 2^{n+1} + 3^n$$

合同式 (mod 5) について考える.

n	2^{n+1}	3^n	$2^{n+1} + 3^n$
1	4	3	2
2	3	4	2
3	1	2	3
4	2	1	3
5	4	3	2

以上から、 $n = 5$ 以降は、 $n = 1$ から $n = 4$ の場合の繰り返しであるから、 $2^{n+1} + 3^n$ が5で割り切れることはないので、 $\textcircled{オ}$ が成立する. ゆえに $2^n + 3^{n+1} \perp 2^{n+1} + 3^n$ である.

☆「★互いに素の性質」は時間がなければ証明なしで使うのもありだろう.