

整数問題

1 整数の性質

1.1 最大公約数, 最小公倍数

- (1) $\frac{2}{7}$ を小数になおしたときの小数第 135 位の数字を求めよ.
- (2) 75 を割っても, 129 を割っても余りが 3 になる自然数をすべて求めよ.
- (3) 7 で割ったら 6 余り, 5 で割ったら 4 余り, 3 で割ったら 2 余る最小の自然数を求めよ.
- (4) 3 桁の自然数の中に 2 でも 3 でも 5 でも割り切れない自然数は何個あるか.
- (5) 7 で割ると 5 余る自然数を a , 7 で割ると 6 余る自然数を b とする. $a - b$ を 7 で割ると, 余りはいくつか.
(ただし, $a > b$ とする.)
- (6) ある 105 未満の自然数 x を 3, 5, 7 で割った余りをそれぞれ a, b, c とする. このとき, $70a + 21b + 15c$ を 105 で割った余りが x になることを証明せよ. (百五減算 (ひゃくごげんざん) 「塵劫記」参考)
- (7) 8633 と 9991 の最小公倍数を求めよ.
- (8) 最大公約数が 3, 最小公倍数が 54 となる 2 つの自然数をすべて求めよ.
- (9) 最大公約数が 3, 和が 24 となる 2 つの自然数をすべて求めよ.
- (10) 自然数 a, b があり, その最大公約数を g , 最小公倍数を l とする. $a^2 + b^2 + g^2 + l^2 = 1300$ のとき, 次の問いに答えよ.
ただし, $a > b$ とする.
 - (i) $g > 1$ のとき, a と b の値を求めよ.
 - (ii) $g = 1$ のとき, a と b の値を求めよ.

1.2 合同式 (mod)

- (1) 3^{103} を 10 で割ったときの余りを求めよ.
- (2) 3^{103} を 7 で割ったときの余りを求めよ.
- (3) $p, 2p + 1, 4p + 1$ が素数であるとき, その素数 p を全て求めよ.
- (4) 2 以上の自然数 n に対して, n と $n^2 + 2$ がともに素数になるのは $n = 3$ の場合に限ることを示せ.

2 式の変形

2.1 不定方程式

- (1) $18x = 24y$ を満たす整数 (x, y) の組をすべて求めよ.
- (2) $85x + 51y = 1700$ を満たす整数 (x, y) の組をすべて求めよ.
- (3) $5x + 3y = 37$ を満たす整数 x, y に対して, $z = \frac{x - y}{x + y}$ とする. z が整数であるとき, 整数 (x, y) の組をすべて求めよ.

2.2 因数分解

- (1) $25!$ を素因数分解せよ.
- (2) $50!$ は末尾に 0 がいくつ並ぶか.
- (3) 96 の正の約数の個数と, 正の約数の総和を求めよ.
- (4) 504 の正の約数の個数と, 正の約数の総和を求めよ.
- (5) 2 ケタの自然数の中で, 正の約数が 3 個であるものをすべて書き並べよ.
- (6) 2 ケタの自然数の中で, 正の約数が 8 個であるものは何個あるか.
- (7) $\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1$ を満たす自然数の組 (a, b) を求めよ.
- (8) x, y が正の整数であるとき, $2x^2 + 7xy + 6y^2 - 104 = 0$ を解け.
- (9) $x^2 + mx + m - 6 = 0$ が整数解 x をもつとき, m の値を求めよ.

3 不等式

3.1 範囲の決定

- (1) $1 \leq x^2 - 4x - 2 \leq 12$ を満たす整数解 x を求めよ.
- (2) $x^2 + y^2 = 4x$ の整数解 (x, y) を求めよ.
- (3) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ を満たす自然数の組 (a, b, c) を求めよ.

3.2 ガウス記号

- (1) $[x]$ を, x を超えない最大の整数とする.
 - (i) $\frac{14}{3} < x < 5$ のとき, $\left[\frac{3x}{7}\right] - \left[\frac{3[x]}{7}\right]$ を求めよ.
 - (ii) n を自然数とする. あらゆる実数 x に対して, $\left[\frac{x}{n}\right] - \left[\frac{[x]}{n}\right]$ を求めよ.
- (2) $[x]$ を, x を超えない最大の整数とする. $4[x^2] - 36[x] + 45 < 0$ を満たす x の範囲を求めよ.

4 総合

- (1) 3以上の素数 p に対して, 整数 a, b, c, d が,
 $a \geq b \geq c \geq d$ かつ $a + b + c + d = 0$ かつ $ad - bc + p = 0$
を満たすとき, 整数 a, b, c, d を p で表せ.
- (2) 自然数 n に対して, $2^n + 3^{n+1}$ と $2^{n+1} + 3^n$ が互いに素になることを証明せよ.