

規則性 いろいろな数列

いろいろな数列を以下に紹介する。気軽にチャレンジしてほしい。初級、中級、上級、おまけと分かれているが、どれも小学生が解けないこともない。どこから始めてもらってもかまわない。できる問題から解いてほしい。

何気ない数列が数学の発展に寄与した例はたくさんあり、以下の数列の中にはそれらが含まれている。入試問題のテーマとして扱われたものも多数ある。小学生には解説を完全に理解できないかもしれないが、数学の雰囲気を感じることができれば十分だ。中学生、高校生、特に受験で数列を扱う高校生は解説を熟読し理解と応用を目指すこと。数列が苦手な高校生はこういった試行錯誤を通して、数学の楽しさと厳密さを再確認してほしい。

☆知識事項

数列において、前から数えて n 番目の数を第 n 項という。第 n 項を n の式で表すことを一般項を求めるという。以下、小学生にはなじみのない文字式がでてくるが、 $3n - 2 = 3 \times n - 2$ というように数字と文字の間に「 $\times$ 」が省略されている。また $5^2 = 5 \times 5$ であり、 $4^3 = 4 \times 4 \times 4$ である。以上に注意して読んでほしい。

また、中学生、高校生は一般項を自力で求めてほしい。中には一般項を求めることが難しいものや厳密な書き方が無理なものもあるが、ほとんど全てを自力で求めることができれば大学生クラスの数学力といえるかもしれない。

ちなみに、 2^0 は 1 である。 $(3^0$ も 4^0 も 1)

1 初級

1. 次の数列の規則性を考えて、 をうめよ。

(1) $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \boxed{8}, 9, 10, \dots$

自然数。一般項は、 n である。

(2) $1, 3, 5, 7, 9, \boxed{11}, 13, 15, \dots$

奇数。一般項は、 $2n - 1$ ($= 2 \times n - 1$)

(3) $2, 4, 6, 8, 10, \boxed{12}, 14, \dots$

偶数。一般項は、 $2n$

(4) $8, 11, 14, 17, \boxed{20}, 23, \dots$

差が 3。これを公差 3 の等差数列という。

この一般項は、 $3n + 2$

(5) $1, 2, 4, 7, 11, 16, \boxed{22}, 29, \dots$

差が自然数（等差数列）。これを階差数列という。

一般項は、 $\frac{n^2 - n + 2}{2}$ ($= \frac{n \times n - n + 2}{2}$)

(6) $100, 97, 94, 91, 88, \boxed{85}, 82, \dots$

公差 -3 の等差数列。一般項は、 $103 - 3n$

(7) $1, 2, 4, 8, 16, \boxed{32}, 64, \dots$

2 倍ずつ増加する数列。公比 2 の等比数列という。

一般項は、 2^{n-1}

(8) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \boxed{34}, 55, \dots$

前 2 つの和。フィボナッチ数列という。

この一般項は難しい。大学入試レベルであろうか。

★フィボナッチ数列の一般項

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

$\sqrt{5}$ は、2 乗すると 5 になる数 ($\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$)。中学生以上は、 n に自然数を代入して確かめてみよう。これが必ず整数になるのだから、数学というのは深遠である。しかも式の中に黄金比が出てくるところがフィボナッチ数列と黄金比の関連性を示唆していて興味深い。求め方は漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ の特性方程式 $x^2 = x + 1$ を使えばよい。また、漸化式の写像から母関数を求め、また逆写像を考えて解く方法もある。母関数とは数列を係数とする整式のことで、 $\{a_n\} = a_0, a_1, a_2, \dots$ に対して、母関数 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots$ となる。

(9) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \boxed{\frac{1}{5}}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$

自然数の逆数。一般項は、 $\frac{1}{n}$

この式を全て足すと（無限級数という）こうなる。

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots\right) \\ &\quad \cdot \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \dots\right) \cdots \end{aligned}$$

このように素数のベキ乗の逆数の和の積になる。発見したのは 18 世紀の数学者レオンハルト・オイラーである。素因数分解の一意性から証明可能。

$$(10) \quad 1, 4, 9, 16, 25, \boxed{36}, 49, \dots$$

☆平方数 自然数の平方 (2 乗した数)

一般項は, n^2

$$(11) \quad 1, 2, 6, 24, 120, \boxed{720}, \dots$$

階乗である. 一般項は $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$

$$(12) \quad 25, 225, 625, 1225, 2025, 3025, \boxed{4225}, \dots$$

$$5^2, 15^2, 25^2, 35^2, 45^2, 55^2, \dots$$

差を調べて, 200, 400, 600, $\dots$ と考えてもいい.

一般項は $(10n-5)^2$

$$(13) \quad 2, 3, 5, 7, 11, \boxed{13}, 17, \dots$$

素数の数列. 一般項は, 「 n 番目の素数」

万物が原子からなるように, どんな自然数も素数の積で表せる. しかもその表し方は 1 通りしかない. 素数の一般項を正確に n の式で求めることができたなら数学史上最も偉大な数学者になれるであろう. ある意味人類の夢であり, またその研究がリーマン予想にもつながっている.

$$(14) \quad 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \boxed{\frac{1}{4}}, \dots$$

これも等比数列. 公比が $\frac{1}{2}$.

一般項は, $\frac{8}{2^{n-1}}$

$$(15) \quad \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \boxed{1}, \dots$$

公差が $\frac{1}{6}$ の等差数列. 差をとってみればわかる.

また, 既約分数は約分前を想像するのがよい.

$$\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \dots$$

一般項は, $\frac{n}{6}$

$$(16) \quad 2, \frac{7}{4}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \boxed{1}, \dots$$

公差が $-\frac{1}{4}$ の等差数列. 差をとってみればわかる.

また, 既約分数は約分前を想像するのがよい.

$$\frac{24}{12}, \frac{21}{12}, \frac{18}{12}, \dots$$

一般項は, $\frac{9}{4} - \frac{n}{4}$

$$(17) \quad 1, 8, 27, 64, 125, \boxed{216}, \dots$$

☆立法数

$$1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, \dots$$

一般項は, n^3 である.

$$(n^3 = n \times n \times n)$$

$$(18) \quad 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, \boxed{6}, \dots$$

規則性に注目. 一般項は場合分けして考える.

$$\text{一般項は, } \begin{cases} \frac{n+1}{2} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{n}{2} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

自然数 k を用いれば,

$$\text{一般項は, } \begin{cases} \frac{n+1}{2} & (n = 2k-1 \text{ のとき}) \\ \frac{n}{2} & (n = 2k \text{ のとき}) \end{cases}$$

また以下の知識を応用して表すことも可能.

★ガウス記号 $[n]$ は n 以下で最大の整数を表す.

$$\text{例 } \begin{cases} \textcircled{1} & [2.5] = 2 \\ \textcircled{2} & [4] = 4 \\ \textcircled{3} & [-0.245] = -1 \end{cases}$$

$$\text{よって, } \left[\frac{n}{2} \right] \text{ を一般項とする数列は,}$$

$$0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots$$

これを応用すれば, この問題の一般項は,

$$\left[\frac{n+1}{2} \right] \text{ と表記することも可能.}$$

$$(19) \quad 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \boxed{5}, \dots$$

規則性に注目すれば簡単.

これも一般項は場合分け的発想がいいだろう.

自然数 k を一般項と考えて, 数列に k が初めて出てくるのは何番目だろうか. 答えは, $\left\{ \frac{k(k-1)}{2} + 1 \right\}$ 番目. また最後の k は, $\frac{k(k+1)}{2}$ 番目にでてくる.

よって, $\frac{k(k-1)}{2} < n \leq \frac{k(k+1)}{2}$ を満たす自然数 k が一般項である.

また, 前問のガウス記号が使えると考えることができればセンスあり. 数列に k が初めて出てくるのが $\left\{ \frac{k(k-1)}{2} + 1 \right\}$ 番目であるから, 一般項はこれと n が等しいことを式にして k について解けばよい.

$$\text{一般項は, } \left[\frac{1+\sqrt{1+8(n-1)}}{2} \right]$$

$$(20) \quad 1, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 4, 5, \boxed{4}, \dots$$

規則的に 3 項ごとに組み分けすればよい.

これも自然数 k を用いて場合分けする.

$$\text{一般項は, } \begin{cases} k & (n = 3k-2 \text{ のとき}) \\ k+1 & (n = 3k-1 \text{ のとき}) \\ k+2 & (n = 3k \text{ のとき}) \end{cases}$$

この場合の k は, 第 k 組を表していることに注目.

2 中級

2. 次の数列の規則性を考えて, $\boxed{}$ をうめよ.

$$(1) \quad 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \boxed{\frac{1}{25}}, \frac{1}{36}, \frac{1}{49}, \dots$$

平方数の逆数. 一般項は, $\frac{1}{n^2}$

この無限級数 (この数列の和) が $\frac{\pi^2}{6}$ であることを求めたのもオイラーである. その後ゼータ関数の研究が始まり, 現在も未解決なリーマン予想につながっていく. ちなみにゼータ関数 $\zeta(s)$ の定義は,
$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots$$

(2) $1, 4, 27, 256, \boxed{3125}, \cdots$

$$1^1, 2^2, 3^3, 4^4, \cdots$$

一般項は, n^n である.

($n^n = n \times n \times n \cdots \times n \leftarrow n$ 個の積)

(3) $3, \frac{17}{6}, \frac{5}{2}, 2, \boxed{\frac{4}{3}}, \frac{1}{2}, \cdots$

やや難.

既約分数は約分前を想像するのがよい.

$$\frac{36}{12}, \frac{34}{12}, \frac{30}{12}, \frac{24}{12}, \frac{16}{12}, \frac{6}{12}, \cdots$$

分子が階差数列.

一般項は, $\frac{36+n-n^2}{12}$

(4) $1, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{3}{5}, \boxed{\frac{7}{12}}, \cdots$

やや難.

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{5}{8}, \frac{6}{10}, \cdots$$

分子は 2 以上の整数, 分母は偶数.

一般項は, $\frac{n+1}{2n}$

(5) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{32}, \boxed{\frac{3}{32}}, \cdots$

やや難.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \frac{5}{32}, \cdots$$

分子は自然数, 分母は公比 2 の等比数列.

一般項は, $\frac{n}{2^n}$

(6) $6, 15, 35, 77, \boxed{143}, \cdots$

難. 素数の積

$$2 \cdot 3, 3 \cdot 5, 5 \cdot 7, 7 \cdot 11, 11 \cdot 13, \cdots$$

一般項は, 「 n 番目の素数 $\times (n+1)$ 番目の素数」

(7) $1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, \boxed{4}, \cdots$

難. 自然数の約数の個数

1 の約数の個数, 2 の約数の個数,

3 の約数の個数, 4 の約数の個数, $\cdots$

一般項は, 「 n の約数の個数」

(8) $101, 103, 107, 109, 113, \boxed{127}, 131, \cdots$

100 以上の素数の数列.

100 以上の素数だけに至難.

一般項は, 「3 桁以上で n 番目の素数」

(9) $2, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{7}, \boxed{\frac{8}{9}}, \cdots$

$$\frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{7}, \cdots$$

と並べたらわかるだろう.

一般項は, 場合分けするならば,
$$\begin{cases} n \text{ が偶数} \Rightarrow \frac{n}{n+1} \\ n \text{ が奇数} \Rightarrow \frac{n+1}{n} \end{cases}$$

ガウス記号による一般項は, 1(18) の応用で, $\frac{2\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}{2\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1}$

☆この数列の積は円周率 π の $\frac{1}{2}$ に近づく.

(ただし, とてもゆっくりと近づくのため手計算で確かめるのは大変だろう.)

★ウォリスの式 (問題はこれの逆数を考えた.)

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \cdot \cdots}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cdots}$$

(10) $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \boxed{\frac{34}{21}}, \cdots$

フィボナッチ数列の倍率である.

少しずつ, ★黄金比 1.6180339887... に近づく.

(★黄金比 $1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$)

一般項は, 1(8) を用いて表すことができるが, 煩雑なため割愛する.

(11) $1, 2, 3, 4, 6, 9, 8, 12, 18, 27, \boxed{16}, \cdots$

至難. 2 と 3 の倍数ということに気づいて, 素因数分解を試みてほしい.

$$2^0 \cdot 3^0, 2^1 \cdot 3^0, 2^0 \cdot 3^1, 2^2 \cdot 2^0, 2^1 \cdot 3^1, 2^0 \cdot 3^2,$$

$$2^3 \cdot 3^0, 2^2 \cdot 3^1, 2^1 \cdot 3^2, 2^0 \cdot 3^3, 2^4 \cdot 3^0, \cdots$$

一般項は, 1(19) の応用と考えて表記可能. しかし煩雑なため割愛する.

3 上級

3. 次の数列の規則性を考えて, $\boxed{}$ をうめよ.

(1) $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \frac{1}{720}, \boxed{\frac{1}{5040}}, \cdots$

階乗の逆数

$$\frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \cdots$$

一般項は, $\frac{1}{(n-1)!}$

☆ちなみにこの数列の和はネイピア数に近づく.

★ネイピア数 $e = 2.718281828459050 \cdots$

★この数列を係数とする整式は e^x と等しい.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

証明は, 大学で解析学を学べばわかる.

$$(2) \quad 1, -\frac{1}{6}, \frac{1}{120}, -\frac{1}{5040}, \boxed{\frac{1}{362880}} \cdots$$

絶対値が奇数の階乗の逆数で、正負が交互.

$$\frac{1}{1!}, -\frac{1}{3!}, \frac{1}{5!}, -\frac{1}{7!}, \frac{1}{9!}, \cdots$$

$$\text{一般項は, } \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$$

☆この数列を係数とする整式は正弦と等しい.

$$\star \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

この証明も解析学のマクローリン級数から.

$$(3) \quad 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{24}, -\frac{1}{720}, \boxed{\frac{1}{40320}} \cdots$$

絶対値が0を含む偶数の階乗の逆数で、正負が交互.

$$\frac{1}{0!}, -\frac{1}{2!}, \frac{1}{4!}, -\frac{1}{6!}, \frac{1}{8!}, \cdots$$

$$\text{一般項は, } \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}$$

☆この数列を係数とする整式は余弦と等しい.

$$\star \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

この証明も解析学のマクローリン級数から.

3(1)~(3)の結果から、オイラーは以下を導出した.

$$\star e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

指数に虚数 i をとるとという大胆な発想に注目.

この式に $\theta = \pi$ を代入してみよう.

$$\star e^{\pi i} = -1 \quad (\Leftrightarrow e^{\pi i} + 1 = 0)$$

数学史上最も美しいオイラーの式である！よく知られた無理数と数字の基本0と1とを簡潔な式の形で結びつけたのは空前絶後の偉業であろう.

また以上から次のような式も導ける.

$$\star \begin{cases} \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \end{cases}$$

4 おまけ

4. 次の数列の規則性を考えて、 $\boxed{}$ をうめよ.

$$(1) \quad \boxed{A}, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K$$

「…」がないことに注目. 数字は13個しかない. 13と言えば、答えはトランプである.

$$(2) \quad 31, \boxed{28}, 31, 30, 31, 30, 31, 31, 30, 31, 30, 31$$

これも「…」がないことに注目. 数字は12個だ. ヒントは「西向く侍」. 答えは月ごとの日数である. 正確にいえ

ば「28 か 29」

$$(3) \quad 1, 2, 3, \boxed{5}, 4, 4, 2, 2, 2, 2, \cdots$$

一, 二, 三, 四, 五, 六, 七, 八, 九, 十, …
漢数字の画数を並べたものである.

$$(4) \quad 7, 8, 5, 5, \boxed{3}, 4, 4, 6, 9, 7, 8, 8$$

これも12個である. 正解は、月を英語にして、
January, February, March, April, May, June, July, August, September, October, November, December
これらの文字数である.

$$(5) \quad 1, 41, 4, 21, \boxed{3}, 56, \cdots$$

「,」をとって並べてみれば中学生以上はわかるはず.
 $\sqrt{2} = 1.41421356 \cdots$ ひとよひとよにひとみごろ
この数字が1桁, 2桁の繰り返しで出てくる.

$$(6) \quad 6, 2, 8, 2, 10, 18, \boxed{4}, \cdots$$

至難. 全て偶数であるから、2で割ってみると、
3, 1, 4, 1, 5, 9, … とくればわかるだろう.
円周率 $\pi = 3.14159265358979 \cdots$
妻子(さいし) 異国(いこく)に婿(むこ)さん号泣

この問題は *SoftBankCreative* 出版の「数学ガール」から拝借した. 恋愛と数学がテーマの本で、理系高校生は暇があれば読んでほしい. 他に講談社の「*Q.E.D.*」という漫画でも数学がよくテーマとして取り上げられる. こちらは推理もので *NHK* のドラマにもなっている. 「*Q.E.D.*」とはラテン語の「*Quod Erat Demonstrandum*」の頭文字からきており、「証明終了」の意.

$$(7) \quad 20, 11, 3, \boxed{7}$$

このプリントをよく見てみたらわかる(笑).
各大問にある小問の数である.
1(1)~(20), 2(1)~(11), 3(1)~(3), 4(1)~(7)