場合の数　基本公式　(重複 or 重複しない) & (順列 or 組合せ)

1　導入

重複組合せの使い方がよくわからないということはないだろうか.
場合の数の基本公式において不思議なことがないだろうか.

順列の公式 ${}_n\mathrm{P}_r$ は異なる n 個のものから r 個を選んで並べるときに使う.
例えば，$1,2,3$ から 2 つ選んで並べるなら，$12,13,21,23,31,32$ の 6 通りであり，公式を用いると，
${}_3\mathrm{P}_2 = 3\times 2 = 6$ 通り
となる.
組合せの公式 ${}_n\mathrm{C}_r$ は異なる n 個のものから r 個を選ぶときに使う.
例えば，$1,2,3$ から 2 つ選ぶなら，$12,13,23$ の 3 通りであり，公式を用いると,
${}_3\mathrm{C}_2 = \dfrac{3\times 2}{2\times 1} = 3$ 通り
となる.
これらが対の関係になるのは，並べるか並べないかの違いであり，順番がキーポイントだ.

では，重複組合せと対になるものは何だろうか.

重複組合せの公式 ${}_n\mathrm{H}_r$ は異なる n 個のものから重複を許して r 個選ぶときに使う.
この定義が難しい. これも例をあげて考えてみよう.
$1,2,3$ から重複をゆるして 2 個選ぶなら，$11,12,13,22,23,33$ の 6 通り.
重複をゆるすので，別に 3 個を超えて選んでもいい. 100 個でも，1 億個でも選べる. 順列や組合せのように 3 個の中から選ぶときは 1 個から 3 個までしか選べないということはない. (公式では 0 個選ぶときも考えられるが，現実的ではない)
公式を用いると，${}_3\mathrm{H}_2 = {}_{3+2-1}\mathrm{C}_2 = {}_4\mathrm{C}_2 = \dfrac{4\times 3}{2\times 1} = 6$ 通り.
では，重複をゆるして並べ方も考えるとどうなるのか.
$1,2,3$ から重複をゆるして 2 個選んで並べる方法は，$11,12,13,21,22,23,31,32,33$ の 9 通り.
これは樹形図を描けばもっとはっきりする. わざわざ特別な公式としてあげるまでもなく，3^2 である. つまり，n 個から重複をゆるして r 個選んで並べる方法は，n^r である. これが重複順列であり，重複組合せと対の関係になっていることをしっかりと理解している人は少ないが，一応約束記号もある.
　★ 重複順列　$\boldsymbol{{}_n\Pi_r = n^r}$
こうして対の関係を考えると，重複組合せも少し身近に感じられないだろうか.

2　理論

場合の数の基本計算公式は，以下の 4 つ．

	順列…並べる場合の数	組合せ…選ぶ場合の数 (樹形図は必ず小さい順)
重複ダメ	①　${}_n\mathrm{P}_r$　異なる n 種類から重複ダメで r 個並べる	②　${}_n\mathrm{C}_r$　異なる n 個から重複ダメで r 個選ぶ
重複 OK	③　${}_n\Pi_r = n^r$　異なる n 個から重複 OK で r 個並べる	④　${}_n\mathrm{H}_r$　異なる n 個から重複 OK で r 個選ぶ

①　${}_n\mathrm{P}_r$　異なる n 個から重複ダメで r 個並べる

例題 1　$1, 2, 3, 4$ をつかって 3 ケタの整数をつくる．同じ数字は 2 回以上つかってはならない．123〜432.

例題 2　A 君, B 君, C 君が桜, 松, 竹, 梅の中から 1 つを選ぶ．ただし同じものを選べない．

　どちらも　${}_4\mathrm{P}_3 = 4 \times 3 \times 2 = \mathbf{24}$ **通り**

A	B	C
1〜4	残り 3 個	残り 2 個

①樹形図　$123, 124, 132, 134, 142, 143, 213, 214, 231, 234, 241, \cdots, 413, 421, 423, 431, 432$

②　${}_n\mathrm{C}_r$　異なる n 個から重複ダメで r 個選ぶ (並べない！)

例題 1　$1, 2, 3, 4$ から 3 個選ぶ．同じ数字は 1 回しか選べない．123〜234.

例題 2　A 君が桜, 松, 竹, 梅の中から 3 つを選ぶ．ただし同じものを選べない．

　どちらも　${}_4\mathrm{C}_3 = \mathbf{4}$ **通り**

A	A	A
1〜4	残り 3 個	残り 2 個

②樹形図　$123, 124, 134, 234$

樹形図のイメージは　$p < q < r$

③　${}_n\Pi_r = n^r$　異なる n 個から重複 OK で r 個並べる

例題 1　$1, 2, 3, 4$ をつかって 3 ケタの整数をつくる．同じ数字を何回選んでもよい．111〜444.

例題 2　A 君, B 君, C 君が桜, 松, 竹, 梅の中から 1 つを選ぶ．同じものを選んでもよい．

　どちらも　${}_4\Pi_3 = 4^3 = \mathbf{64}$ **通り**.

イメージは次.

A	B	C
1〜4	1〜4	1〜4

③樹形図　$111, 112, 113, 114, 121, 122, 123, 124, \cdots, 441, 442, 443, 444$

④　${}_n\mathrm{H}_r$　異なる n 個から重複 OK で r 個選ぶ (並べない！)

例題 1　$1, 2, 3, 4$ から 3 個選ぶ．同じ数字を何回選んでもいい．111〜444.

例題 2　A 君が桜, 松, 竹, 梅から 3 つを選ぶ．同じものを何回選んでもよい．

　どちらも　${}_4\mathrm{H}_3 = {}_{4+3-1}\mathrm{C}_3 = \mathbf{20}$ **通り**.

A	A	A
1〜4	1〜4	1〜4

④樹形図　$111, 112, 113, 114, 122, 123, 124, 133, 134, 144, 222, \cdots, 333, 334, 344, 444$

樹形図のイメージは　$p \leqq q \leqq r$

③との違いは，121 のような右のケタにそれまでよりも小さい数字はこないこと．これが組合せの樹形図の特徴.

121 は並べ替えれば，112 と同じであるから，すでに数えている.

3　実践

では，問題.

1.　次の問題での場合の数は，上にあげた①〜④のいずれに当てはまるかを言え.

（1）　サイコロを 3 回ふる. 出た目を順に a, b, c とする. $a < b < c$ となる場合の数.

（2）　サイコロを 3 回ふる. 出た目を順に a, b, c とする. $a \leqq b \leqq c$ となる場合の数.

（3）　$MATH$ の 4 文字を並べ替えてできる単語の数.

（4）　111222 を並べ替える場合の数. 111222 も含める.

（5）　$000, 001, 002, 003, 004, \sim, 998, 999$. この中から 9 を全くつかわない数の個数.

（6）　$000, 001, 002, 003, 004, \sim, 998, 999$. 百の位, 十の位, 一の位を順に a, b, c としたとき，$a > b > c$ を満たす数の個数.

（7）　5 科目をそれぞれ 1〜5 段階評価した場合の数.

（8）　10 個の見分けのつかないボールを 3 人の人間に配る場合の数. 0 個の人がいてもよいが 10 個全てを誰かにくばること.

（9）　10 個の見分けつくボールを 3 人の人間に配る場合の数. 0 個の人がいてもよいが 10 個全てを誰かに配ること.

（10）　0 以上の整数 x, y, z に対して，$x + y + z = 6$ となる (x, y, z) の組数.

解答

(1) ② ${}_6\mathrm{C}_3 = 20$ 通り

(2) ④ ${}_6\mathrm{H}_3 = {}_8\mathrm{C}_3 = 56$ 通り

(3) ① ${}_4\mathrm{P}_4 = 4! = 24$ 個

(4) ② 6 つの異なるポジションから 1 を置く場所を 3 つ選ぶ. ${}_6\mathrm{C}_3 = 20$ 通り

(5) ③ ${}_9\Pi_3 = 9^3 = 729$ 個

(6) ② ${}_{10}\mathrm{C}_3 = 120$ 個

(7) ③ ${}_5\Pi_5 = 5^5 = 3125$ 通り

(8) ④ 10 個のボールそれぞれに配られる人の名前 A, B, C をかいていく. 同じボールなので, 3 種類 (A, B, C) の中から 10 回重複をゆるして選ぶことになる. ${}_3\mathrm{H}_{10} = {}_{12}\mathrm{C}_{10} = 66$ 通り.

(9) ③ 10 個のボールそれぞれに配られる人の名前をかいていく. ${}_3\Pi_{10} = 3^{10} = 59049$ 通り

(10) ④ $x + y + z = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ と考える. これは 6 個の見分けのつかないボールを 3 人 (x, y, z) にくばる場合の数と同じ. ${}_3\mathrm{H}_6 = {}_8\mathrm{C}_6 = 28$ 通り.

(4) を応用した頻出問題も紹介しておく.

問 111223333 を並べ替える場合の数 $\Rightarrow$ $\dfrac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 4!} = 1260$ 通り

1 を置く場所 3 つ, 2 を置く場所 2 つ, 3 を置く場所 4 つを合計 9 つの場所から選ぶ場合の数である.

これを 1 をおく場所を 9 つの中から 3 つ選び, 残りの 6 つの場所から 2 をおく場所を 2 つ選ぶと考えて,

$${}_9\mathrm{C}_3 \cdot {}_6\mathrm{C}_2 = \frac{9!}{3! \cdot 6!} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!}$$

としても同じ結果がでる.

では, 上の最後の問の応用類題. 重複組合せの頻出問題である.

2. 次の問に答えよ.

(1) 自然数 x, y, z に対して, $x + y + z = 8$ を満たす (x, y, z) の組は何組あるか. 重複組合せ${}_n\mathrm{H}_r$を用いて求めよ.

(2) 大中小のサイコロをふって和が 7 になる場合の数を重複組合せ${}_n\mathrm{H}_r$を用いて求めよ.

(3) 大中小のサイコロをふって和が 11 になる場合の数を重複組合せ${}_n\mathrm{H}_r$を用いて求めよ.

(4) 大中小のサイコロをふって和が 16 になる場合の数を重複組合せ${}_n\mathrm{H}_r$を用いて求めよ.

解答

(1)　これは前問の (9) の応用.

単純に数字をあてはめて, ${}_3\mathrm{H}_8$ とはできない. 自然数という縛りがあるから.

最初に x, y, z に 1 を配る.

　残りの $8-1\times3=5$ を, $5=1+1+1+1+1$ と考えて, これを配る.

　　$\boldsymbol{{}_3\mathrm{H}_5} = {}_7\mathrm{C}_5 = \mathbf{21}$ **通り**.

(2)　(1) の応用である. 大中小の出目を順に x, y, z とする.

サイコロの目であるから, 1 から 6 の自然数.

　$x+y+z=7 \quad \Rightarrow \quad x, y, z$ に 1 を配って, $x'+y'+z'=7-3$ と考える.

　$\therefore \quad \boldsymbol{{}_3\mathrm{H}_4 = 15}$ **通り**

☆確かめ

和が 7

大	中	小	並べ替え
1	1	5	3 通り
1	2	4	6 通り
1	3	3	3 通り
2	2	3	3 通り

$\Rightarrow \quad 6+3\times3=15$ 通り

(3)　さらに (1) の応用である. 大中小の出目を順に x, y, z とする.

サイコロの目であるから, 1 から 6 の自然数.

　$x+y+z=11 \quad \Rightarrow \quad x, y, z$ に 1 を配って, $x'+y'+z'=11-3$ と考える.

　　${}_3\mathrm{H}_8 = {}_{10}\mathrm{C}_8 = 45$ 通り.

ここから 7 以上の自然数をつかう場合の数をのぞく.

　$(7,1,1)$ を最初に配ると考えて,

　　$11-(7+1+1)=2 \quad \Rightarrow \quad {}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{H}_2 = 3\cdot6 = 18$ 通り

　$\therefore \quad \boldsymbol{{}_3\mathrm{H}_8 - 3{}_3\mathrm{H}_2 = 45 - 18 = 27}$ **通り**

☆確かめ

和が 11

大	中	小	並べ替え
1	4	6	6 通り
1	5	5	3 通り
2	3	6	6 通り
2	4	5	6 通り
3	3	5	3 通り
3	4	4	3 通り

$\Rightarrow \quad 6\times3+3\times3=27$ 通り

(4)　さらなる応用. 大中小の出目を順に x, y, z とする.

サイコロの目であるから, 1 から 6 の自然数.

　$x+y+z=16 \quad \Rightarrow \quad x, y, z$ に 1 を配って, $x'+y'+z'=16-3$ と考える.

　　${}_3\mathrm{H}_{13} = {}_{15}\mathrm{C}_{13} = 105$ 通り.

ここから 7 以上の自然数をつかう場合の数をのぞく.

　$(7,1,1)$ を最初に配ると考えて,

　　$16-(7+1+1)=7 \quad \Rightarrow \quad {}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{H}_7 = 3\cdot36 = 108$ 通り

さらに $(7,7,1)$ の場合がかぶるので, これを補完する必要がある.

　　$16-(7+7+1)=1 \quad \Rightarrow \quad {}_3\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{H}_1 = 3\cdot3 = 9$ 通り

　$\therefore \quad \boldsymbol{{}_3\mathrm{H}_{13} - 3{}_3\mathrm{H}_7 + 3{}_3\mathrm{H}_1 = 105 - 108 + 9 = 6}$ **通り**

別解　1 から 6 を逆に考える. 対称性より, 和が 3 になる場合の数と和が 18 になる場合の数は同じである. なぜなら 6 が出たら 1 と考えればよい. 加えて 5 が出たら 2 と考えれば, 和が 4 になる場合の数と和が 17 になる場合の数は同じ. つまり, 和が 16 になる場合の数は和が 5 になる場合の数と同じだから, 求める場合の数は, $5-3=2$ より, $\boldsymbol{{}_3\mathrm{H}_2=6}$ **通り**.

☆確かめ
和が 16

大	中	小	並べ替え
4	6	6	3 通り
5	5	6	3 通り

$\Rightarrow\quad 3\times 2=6$ 通り

4　発展

ちなみに 2(4) の最初の解き方を一般化すると次のようになる.

★ 1〜m までの自然数から n 個数字を重複をゆるして並べる. これらの和が s になる場合の数
m, n は自然数. s は, $n \leqq s \leqq mn$ を満たす整数.

$\boldsymbol{{}_n\mathrm{H}_{s-n}-{}_n\mathrm{C}_1\cdot{}_n\mathrm{H}_{s-n-m}+{}_n\mathrm{C}_2\cdot{}_n\mathrm{H}_{s-n-2m}-{}_n\mathrm{C}_3\cdot{}_n\mathrm{H}_{s-n-3m}+\cdots+(-1)^k{}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_n\mathrm{H}_{s-n-km}+\cdots}$

ただし, ${}_n\mathrm{H}_r$ の右の小添字が負のものは全ては 0 とする.

★ 具体化⇔抽象化　抽象化 (一般化) できたら, 具体例で確かめ.
$m=6$, $n=3$, $s=16$ のとき, 問 2(4).
${}_3\mathrm{H}_{16-3}-{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{H}_{16-3-6}+{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{H}_{16-3-12}-{}_3\mathrm{C}_3\cdot{}_3\mathrm{H}_{16-3-18}+\cdots={}_3\mathrm{H}_{13}-3{}_3\mathrm{H}_7+3{}_3\mathrm{H}_1-0$

$m=6$, $n=4$, $s=24$ のとき, $(6,6,6,6)$ の 1 通りしかない.
${}_4\mathrm{H}_{24-4}-{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{H}_{24-4-6}+{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{H}_{24-4-12}-{}_4\mathrm{C}_3\cdot{}_4\mathrm{H}_{24-4-18}+\cdots$
$={}_4\mathrm{H}_{20}-4{}_4\mathrm{H}_{14}+6{}_4\mathrm{H}_8-4{}_4\mathrm{H}_2$
$={}_{23}\mathrm{C}_{20}-4{}_{17}\mathrm{C}_{14}+6{}_{11}\mathrm{C}_8-4{}_5\mathrm{C}_2$
$={}_{23}\mathrm{C}_3-4{}_{17}\mathrm{C}_3+6{}_{11}\mathrm{C}_3-4{}_5\mathrm{C}_2$
$=1771-4\times 680+6\times 165-4\times 10$
$=1771-2720+990-40=1$ 通り

$m=1$, $n=10$, $s=10$ のとき, $(1,1,1,\cdots,1)$ の 1 通りしかない.
${}_{10}\mathrm{H}_{10-10}=1$ 通り

$m=2$, $n=5$, $s=8$ のとき, $(1,1,2,2,2)$ の並べかえで 10 通り.
${}_5\mathrm{H}_{8-5}-{}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{H}_{8-5-2}$
$={}_7\mathrm{C}_3-5\times{}_5\mathrm{C}_1$
$=35-25=10$ 通り