矛盾のある世界と矛盾のない世界

矛盾を好きですか. 嫌いですか. 多くの方は嫌いだと思います. 矛盾をこの世界から排除するために日夜努力している方も多くいるでしょう. そういった人たちには大変恐縮ですが, 私は矛盾が大好きです（笑）.
現実にはたくさんの矛盾がありますが, 数学の世界は矛盾のない世界を追い求めます. 私はこのギャップがたまりません. 数学の世界で矛盾を排除することも, 現実社会の矛盾について考えることも楽しいものです. もちろん現実の矛盾に泣くこともよくありますが（笑）.

矛盾は話の調味料になります. 矛盾が笑いを呼ぶこともありますよね. 例えば「1 歳の A ちゃんが時速 1000km で動いています. 」と聞けば, 誰しも頬が緩むでしょう. この話が矛盾しない状況はどんな場合でしょうか. 親に連れられて飛行機に乗っていたというのも一つの解ですね. ではそれ以外の答えを考えてみてください. どうでしょうか. 解答は後述します.

矛盾を見抜く力

次のような分類分けはとても嫌いです.「できる子」と「できない子」. これからする話は, できればしたくない話です. 数学ができなくても人生を楽しんでいる生徒たちを見ると元気がでます. それが私のモチベーションになりますし, 彼らに尊敬を抱く一番の要因でもあります. 算数・数学のできるできないは私にとっては大したことではありません. この世界を楽しもうと自覚して取り組むわけでなく, ただ楽しむ. 生徒たちのそんな無邪気な面を見るのが, この仕事の醍醐味と思っています.
しかし成績向上を求められる現場で私はできる限りのことをしたいと思っています. これからする話はそのためのお話です.

私が生徒たちによく言う言葉の一つに「**アテカン** でいいから, 答えを書いて. 」というものがあります. 算数・数学を教えていて気が付きました.「アテカンでいい. 」と言ったとき, できる子とできない子に大きな差があります. できる子はアテカンで答えを書いたあとに検証をしますが, できない子の多くは検証しないのです.

できる子の心の声
「ああでもない. こうでもない. この数字だと, ここがこうなって, こうなるから, あ！おかしい. ありえない. じゃあ, 数字を大きくしてみるか. 」
できない子の心の声
「アテカンねぇ…. とりあえず, この数字にしよう. 」
できる子の心の声
「数字を大きくすると, もっとおかしくなった. じゃあ数字を小さくしてみよう. 」
できない子の心の声
「…. 今日の晩御飯は何だろうな. 昨日カレーだったから…. 」
できる子の心の声
「うん. 近い. じゃあ, こんなもんかな. 」
できない子の心の声
「きっと今日もカレーだな. うん. 」

極端な描写をしてみました（笑）. できる子の発想に注目してください. 彼らは, ダメなら他の手段を常に探します. この確かめ作業が, 長い年月の間積み重なって, できる子とできない子の差を明確にしていきます. できる子は思考錯誤の繰り返しから, 消去法や逆算的解法などのスキルを伸ばします. 自らが思いついた方法に, 先生や親, 問題集の解法などから得た様々な情報を取り入れて, 発想力を鍛えていきます. 一方, できない子はいつまで経っても重要なことに気付かず, 教えられた方法も作業不足から実感できません. イメージできないので, 典型的な問題はできても, 問題の趣向が少し変わると, 本質をつかんでいないので太刀打ちできないということになりがちです.

アテカンを嫌う先生もいるようですが, 私が重要視しているのはアテカンの前後のプロセスです. 方法がわからない. 数を想像してみる. そのアテカンを検証する. アテカンで答えが合う合わないに関係なく理屈はどうだったか確かめる. これらがしっかりしているならアテカンも大いに結構でしょう.

耳にタコの方もいるでしょうが,「**消しゴムを使うな！**」は私が授業で一貫していることです.「失敗はいいことだから残しておきなさい.」というのが理由ですが, これも矛盾を見抜く力を鍛えることにつながります.

計算ミスは演算時に矛盾が起きた証拠ですし, 解答欄への記入ミスは作業の矛盾でしょう. 失敗は常に矛盾であり（逆に矛盾は失敗とは言えません), 消しゴムを使うということはその矛盾を消してしまうことです. 矛盾から目を背け, 自分にとって都合のいいものだけに囲まれるなんて, 贅沢すぎると思いませんか. 普通に暮らしていたら, そんな世界は仮想世界にしかないはずです.

×の全くないノートは矛盾のない世界ですが , そんな世界, 私は大嫌いです（笑). よくそういうノートを見ます. 答えを丸写ししたという最悪のケースも考えられますが, 好意的に見ても「問題が君にとって簡単すぎるね」ということに他なりません. どっちにしてもその子にとっていい勉強ではありません.

人間だれしもミスをします. 重要なことはそのミスを理解し, 修正することでしょう. 矛盾の消去は, かえって矛盾の軽視・無視につながり, 矛盾を見抜く力が伸びることを抑制するのではないでしょうか. ちゃんと×をし , 消しゴムを使わず修正し, ミスの理由を書く. そんなノートを作ってほしいと思っています. そういうノートは, 後から見ても矛盾がはっきりわかるノートなので, 見るだけで復習になります. 何年か経って「ああ, このころはこんなミスをしてしたのか.」とわかるノートはまさに青春の 1 ページでしょう（笑).

慎重居士（よく確かめて矛盾をみつける). せっかち（ミスしてもすぐ直すことを繰り返せば, 経験回数がかせげます). 小さいころから, 考えることが癖になっている. 答えを他人から教えられるの嫌. 他人の言葉をうのみにしない. 素直じゃない（笑). 作業を面倒くさがる（早い方法を見つけるくせがつきます). こういったことはどれも算数・数学においてプラスになります.

たいていの個性は算数・数学を向上させる力と相反しません. 重要なことは数字を楽しむ環境を与えられるかどうかだと思っています. 個性はアプローチや作業力の差などには現れても, 数の本質をとらえることとはあまり関係がないと思います. 周囲が矛盾といったものをいろいろと見せてあげたり, 本人の矛盾を指摘してあげたりして, 矛盾に敏感になれるような環境を用意できれば彼らの数覚を鍛えることになるでしょう. 個性によってその道のりに差がでても, それが数覚の差になるかどうかは, また違った問題のように思えます.

矛盾を見抜く力とは, つっこみのセンスでもあります. 私のボケや冗談にすぐつっこめる. 口に出さなくても, 心の中でつっこめる. そうあって欲しいと思います.

矛盾の具体例 1

まず冒頭にあげた「1 歳の A ちゃんが時速 1000km で動いています.」の解答からお話しましょう. 親に連れられて乗り物に乗っていなかったとしても, 答えは色々あると思います. 思いつくところをあげれば,

① 地球 1 周 4 万 km です. 地球の自転は 1 日 24 時間でこれを 1 周するということで,

$$4\text{万 km} \div 24 = \frac{5000}{3} = \text{時速 } 1666\frac{2}{3}\,\text{km}$$

これは赤道直下でのスピードですから緯度が上がれば, ちょうど時速 1000km で動く A ちゃんも可能でしょう.

② 地球の公転運動や, 太陽系の運動, 銀河系の運動など. ①の類型ですね.

③ 飛行機から地上にいる A ちゃんを見た. 相対速度の話になり, 飛行機内の人から見れば, 地上は時速 1000km で動いているように見えます. 言葉の定義をどうとるかの問題ですね.

④ 飛行機から落ちた. 怖い話になるので詳述しません（笑).

⑤ A ちゃんは親以外の人に連れられて飛行機に乗っていた. 汚い解答ですがありでしょう.

⑥ A ちゃんという名前をもつ, 生産されてから 1 年経ったジェット機そのものだった（笑).

⑦ A ちゃんは, 生産されてから 1 年経ったジェット機の椅子だった. ⑤の類型です.

⑧ A ちゃんは, 生まれて間もない, 隕石だった. ここまでくると何でもありですね.

汚いクイズで申し訳ありません. 答えは他にもあるでしょう. ここで言いたいことは, 矛盾の帳尻をあわせるためには, 少々強引なことも必要だということよりも, 自由な発想を楽しんでほしいということです. 可能性を考えて, 矛盾を昇華させることは, 新しい道を見つけることと似ていると思います. 昔ヘーゲルが提唱した弁証法の実践ですね.

矛盾にすぐ気が付くかどうかは計算力も大いに関わってきます. 例えば, 197×6 を計算して 1082 という答えが出たとします. $1 + 0 + 8 + 2 = 11$ ですから, 1082 は 3 で割り切れません. しかし 6 倍したのだから 3 で割り切れなければおかしい. こういった発想があるかどうかも重要です.

では次のミスの理由を考えて下さい.

(1) $18 + 36 = 44$

(2) $3 \div 6 = 2$

(3) 20 の 5 %は 10

(4) $39312 \div 78 = 54$

(5) $16 \div 9 \times 4 - 1 \div 9 \times 10 = 5.99999999998$

自分なりの結論を出してから答えを見てください.

答え

(1)　$18+36=44$

18 も 36 も 6 の倍数ですから和も 6 の倍数. 44 ではおかしいですね. $18+36=54$ なので, 繰り上がりのミスでしょう. 上の桁から計算するよう心掛けると暗算能力が上がりますが, そういったチャレンジをしてのミスなら, どんどんして欲しいものです.

基本的に足し算でもかけ算でも, 下 1 ケタのミスは簡単に発見できます. 下 1 ケタだけ計算すればよいのです. また, 一番の上のケタの数も同じようにすればだいたいわかります. ケタ数についても, 上の計算なら, 2 ケタ + 2 ケタは 2 ケタか 3 ケタですからだいたいわかります. 以上の 3 つについては作業が簡単なので, 確かめる癖をつけましょう.

ちなみに, 18 も 36 も 18 の倍数なので, $18+36=18\times1+18\times2=18\times3=54$ と頭の中でできることが理想です. よく出てくる数字の倍数は頭の中に入れておきたいものです.

(2)　$3\div6=2$

3 と 6 を逆にした. よく見るミスです. 割れる方で割ってしまい, 意味を理解していないケースです. 数値を逆にするミスはよく起こりますが, $\frac{1}{2}$の確率で合うので, 理解できていなくても答えが合うこともあります. ですから似たような計算を多くしなければ発見できません. 不注意で逆にしたのか, 意味がわからずにランダムに計算しているのかについて, 周囲の人間が気が付く必要があるかもしれません.

(3)　20 の 5 %は 10

5 % = 0.05 とすべきところを, 5 % = 0.5 とした. 歩合の 5 割と 5 %がゴチャゴチャになっていることも考えられます.

(4)　$39312\div78=54$

$39312\div78=504$ ですから, 真ん中の 0 を抜かしたと考えられます. 割り算の筆算時によく見られるケースで, ちゃんと復習できないと何回も繰り返しますので注意が必要です. 割る数よりも小さいものがでたら, 上の商の部分に 0 を書いて, 次のケタを下ろす作業がわかっていないことが考えられます.

(5)　$16\div9\times4-1\div9\times10=5.99999999998$

こんな答えを見つけたら私はキレます. これは計算機を使った証拠です.（ちゃんとした答えを出す計算機もあります. 詳しくは後述.）計算機はケタに限界がありますから,

$1\div9=0.1111111111$

というように結果の一部しか出力できません. ここで出た答えを計算機で 9 倍すると,

$0.1111111111\times9=0.9999999999$

元に戻って考えますと, $1\div9\times9=1$ ですから, この 0.9999999999 は間違いです. つまり計算機での計算は絶対正しいものではなく, だいたい正しいものなのです. 問題のミスは計算機を使わないかぎりほとんど考えられないミスと言ってもいいと思います.

問題の計算式の正解は $\dfrac{16}{9}\times4-\dfrac{1}{9}\times10=\dfrac{64}{9}-\dfrac{10}{9}=6$ です.

ちなみに $1\div9\times9=1$ というようにちゃんとした答えをはじき出す計算機もあります. パソコンの計算ソフトはちゃんと 1 を答えとして出力します. 携帯電話に計算機が内臓されていますよね. あるとき携帯を持っている生徒たちにこの計算をさせたところ, だいたい半分の生徒は 1 になりました. 半分もいたことに驚いた覚えがあります.

矛盾の具体例 2

文章題について考えてみましょう. 次の文章の矛盾を考えてみてください.

(1)　A と B の差は 2. B と C の差は 1. このとき, A と C の差は 3 である.

(2)　$A\times A$ の 1 の位が 1 になった. ということは A の 1 の位は 1 である.

(3)　A が時速 12km で進むとき, 40 分で $12\times40=480$km 動ける.

答え

(1)　A と B の差は 2．B と C の差は 1．このとき，A と C の差は 3 である．

B が A と C の間にあるときは成り立ちますが，そうではないときは成り立ちません．例えば「 $A=1,\ B=3,\ C=2$ 」のときなどです．このような，ある議論が成り立たない具体例のことをその議論の **反例** と言います．

(2)　$A\times A$ の 1 の位が 1 になった．ということは A の 1 の位は 1 である．

1 の位が 9 の場合も，$9\times 9=81$ で，1 の位が 1 になります．

(3)　A が時速 12km で進むとき，40 分で $12\times 40=480$km 動ける．

単位のミスです．「40 分で東京から京都くらいまで行けるの？すごいねぇ（笑）．」ちなみに東京から京都は直線距離だと 360〜380km くらいです．

正解は，40 分 $=\dfrac{2}{3}$時間 なので，$12\times\dfrac{2}{3}=8$km です．この間違えはかなり多くの生徒がします．常識と照らし合わせて欲しいですが，速さの概念がまだ確立されていないので仕方がないのでしょうが，割合の概念もわかっていないのは明らかなのでご注意ください．

矛盾の具体例 3

中学に入ると文字式の計算が必修になります．数字を抽象化することがテーマになるわけですが，具体例を常にイメージできなければ理解不足ということです．

次の問題が矛盾しているかしていないか考えて下さい．矛盾している場合は反例もしくは正答をあげること．

(1)　$a<b$ ならば $a^2<b^2$ である．

(2)　$ax=a$．このとき $x=1$ である．

(3)　$\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{a-b}{3}=3(a+b)+2(a-b)=3a+3b+2a-2b=5a+b$

(4)　$(-3)^2-(-3^2)=9-9=0$

(5)　$x^2\div x^3\times x=x$

(6)　0 は正の数でも負の数でもない．

(7)　$\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{a+b-a-b}{2}=0$

(8)　2 乗して 4 になる数は $+2$ だけである．

(9)　x,y についての連立方程式 $\begin{cases} x+y=3 \\ ax+2y=0 \end{cases}$ には必ず解がある．

答え

(1)　$a < b$ ならば $a^2 < b^2$ である．
矛盾．反例「 $\boldsymbol{a = -2}$ ， $\boldsymbol{b = 1}$ 」

(2)　$ax = a$ ．このとき $x = 1$ である．
$\boldsymbol{a = 0}$ のとき矛盾． 0 で割ってはいけません．なぜいけないかは「0 で割ると世界が壊れる話」を参照ください．よって正しい答えは，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a \neq 0} \text{ のときは} \quad \boldsymbol{x = 1} \\ \boldsymbol{a = 0} \text{ のときは} \quad \boldsymbol{x} \text{ はあらゆる数.} \end{cases}$$

(3)　$\dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{3} = 3(a+b) + 2(a-b) = 3a + 3b + 2a - 2b = 5a + b$
矛盾． 答えは $\boldsymbol{\dfrac{5a+b}{6}}$ です．最初の変形で分母を消去してしまう計算ミスですが，方程式と計算式の違いが明確になっていないことの証拠で，とてもよく見る間違いです．私はこのミスを見たらよくこういいます．「分母を殺したなぁ！家に帰ったらお母ちゃんに謝れ！」

(4)　$(-3)^2 - (-3^2) = 9 - 9 = 0$
矛盾． 正しい計算は $(-3)^2 - (-3^2) = 9 - (-9) = 9 + 9 = \mathbf{18}$
カッコの外に 2 乗があるならマイナスの 2 乗を考えますが，内に 2 乗があるなら $-3^2 = -9$ と考えねばなりません．

(5)　$x^2 \div x^3 \times x = x$
矛盾． 正しい計算は $\mathbf{1}$ ．これも数字の計算をイメージできれば起きないミスですが，残念なことによく見ます．
$x = 1$ を左辺に代入すると，左辺 $= 1 \div 1 \times 1 = 1$
$x = 2$ を左辺に代入すると，左辺 $= 4 \div 8 \times 2 = 1$
$\cdots$
自分の計算結果に自信がなければ，このように具体的な数字を代入するといいでしょう．

(6)　$\dfrac{a+b}{2} - \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a+b-a-b}{2} = 0$
矛盾． A から A を引いたら 0 です．$A - B$ が 0 でないなら，A と B は違います．同じ式ではないのに，引いて 0 になるのは矛盾です．何も教えないとほぼ全員が最初にするミスです．分数には見えないカッコがありますよ．正答は，

$$\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = \frac{(a+b)-(a-b)}{2} = \frac{a+b-a+b}{2} = \boldsymbol{b}$$

(7)　2 乗して 4 になる数は $+2$ だけである．
矛盾．$\boldsymbol{-2}$ もありますね．

(8)　x, y についての連立方程式 $\begin{cases} x + y = 3 \\ ax + 2y = 0 \end{cases}$ には必ず解がある．
矛盾． $\boldsymbol{a = 2}$ のとき，解はない．
連立方程式は座標平面上で考えれば，2 つの直線の交点になりますが，$a = 2$ のとき，この 2 つの式が表す直線は平行になるので，交点はありません．

矛盾の具体例 4

数学は数学の言語を厳密に理解する必要があります．これをおろそかにすると，矛盾が簡単におきます．つまり間違えるというわけです．

例えば，変数と定数の違いを明確に理解していないと微積分で次のようなミスをします．

① x^x を x について微分して，$x \cdot x^{x-1} = x^x$
② x^x を x について微分して，$x \log x$

どちらも間違えです．このミスは変数 x についての微分ということを理解できていないときに起こります．$(x^n)' = nx^{n-1}$ という公式は，指数が n，つまり x にとって定数のときに使える公式で上の問題にはあてはまりません．①のミスは，指数を定数としたために矛盾が起きます．また，②のミスは $(a^x)' = a^x \log x$ という公式の誤用です．こちらの公式も底 a の部分が x にとって定数のときにしか使えません．

正答は次のようになります．

$y = x^x$ を x について微分する.

$y = x^x$ とおいて★対数微分法を用いる. 両辺の自然対数をとって, $\log y = \log x^x$

両辺を x について微分して,

$$
\begin{aligned}
& (\log y)' = (x \log x)' \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{y'}{y} = (x)' \log x + x (\log x)' \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{y'}{y} = \log x + x \cdot \frac{1}{x} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{y'}{y} = \log x + 1 \\
\therefore \quad & y' = y(\log x + 1) = \boldsymbol{x^x(1 + \log x)}
\end{aligned}
$$

別解もあげましょう. $f(x) = e^{\log f(x)}$ と変形できることを知っていると次のようにすると早くできます.

$y = x^x$ を x について微分する.

$$y = e^{\log x^x} = e^{x \log x}$$

$(x \log x)' = 1 \cdot \log x + x \cdot \dfrac{1}{x} = 1 + \log x$ 　であるから, 合成関数の微分を用いると,

$$\therefore \quad y' = e^{x \log x} \cdot (x \log x)' = e^{x \log x} \cdot (1 + \log x) = \boldsymbol{x^x(1 + \log x)}$$

では問題です.

(1) 　$ax = b$ を解け. ただし a, b は実数とする.

(2) 　$ax < 1$ を解け. ただし a は実数とする.

(3) 　実数 x, y に対して $xy - x - y + 1 = 0$ が成立している. x, y について解け.

(4) 　実数 a, y に対して $ax - a - x + 1 = 0$ が成立している. x について解け.

ここで未習の方のために簡単な知識事項を紹介します.

「 A ならば B である. 」というお話を P としましょう. このとき,

・P の **逆** とは,「 B ならば A である. 」です.

・P の **裏** とは,「 A ではないならば B ではない. 」です.

・P の **対偶** とは,「 B ではないならば A ではない. 」です.

(5) 　「 $x = 1$ ならば $x^2 = 1$ である. 」の逆は正しいか？

(6) 　「男はスケベである. 」の対偶は？

(7) 　「自分でヒゲを剃らない人のヒゲを必ず剃り, それ以外の人のヒゲは剃らない」という理髪師は自分のヒゲを剃ることができるか？

答え

(1) $ax=b$ を解け. ただし a, b は実数とする.

場合分けをして矛盾を排除しましょう.

答え $\begin{cases} ① & \boldsymbol{a=b=0} \text{ のとき} & \boldsymbol{x} \text{ はあらゆる数.} \\ ② & \boldsymbol{a=0} \text{ かつ } \boldsymbol{b\neq 0} \text{ のとき} & \boldsymbol{x} \text{ は解なし.} \quad (\,x \text{ が虚数でも } 0x=0 \text{ は成立する.}) \\ ③ & \boldsymbol{a\neq 0} \text{ のとき} & \boldsymbol{x=\dfrac{b}{a}}\,. \end{cases}$

高校数学になるとこのように場合分けして **全てを考える** ことが当然になります.

①はあらゆる実数としてもいいと思いますが, 複素数（またはそれ以外の数も）まで意識できることが望ましいでしょう.

(2) $ax<1$ を解け. ただし a は実数とする.

これも同様です.

答え $\begin{cases} ① & \boldsymbol{a<0} \text{ のとき} & \boldsymbol{x>\dfrac{1}{a}}\,. \quad (\text{ 負の数で割ると不等号は逆転する.}) \\ ② & \boldsymbol{a=0} \text{ のとき} & \boldsymbol{x} \text{ あらゆる実数.} \quad (\,0x<1 \text{ について考える.}) \\ ③ & \boldsymbol{a>0} \text{ のとき} & \boldsymbol{x<\dfrac{1}{a}}\,. \end{cases}$

細かい話をします. 複素数を代入しても②は成立しますが, 複素数に大小はないので不等式の解としては不適当と考え「あらゆる実数」としました. ちなみに方程式の解に複素数があるのは当然です. (1) との違いも考えてみてください.

(3) 実数 x, y に対して $xy-x-y+1=0$ が成立している. x, y について解け.

$xy-x-y+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(y-1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x=1}$ **又は** $\boldsymbol{y=1}$

$x=1$ のとき y はどんな実数でもよく, $y=1$ とき x はどんな実数でもいいことに留意できれば完璧です.

ちなみにこういった因数分解は整数問題で頻出です. この形をみたら因数分解を自然とできるようにしましょう.

(4) 実数 a, y に対して $ax-a-x+1=0$ が成立している. x について解け.

$ax-a-x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-1)(x-1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{a=1} \text{ のとき} & 0(x-1)=0 \text{ より } \boldsymbol{x} \text{ はあらゆる実数} \\ \boldsymbol{a\neq 1} \text{ のとき} & x-1=0 \text{ より } \boldsymbol{x=1} \end{cases}$

(5) 「 $x=1$ ならば $x^2=1$ である. 」の逆は正しいか？

この話は正しいですが, 逆が正しいかどうかは調べる必要があります.

逆「$x=1$ ではないならば $x^2=1$ ではない. 」となりますので, $\boldsymbol{x=-1}$ **が反例** になりますね. -1 は 2 乗したら 1 になります. つまり「**正しくない**」が正解です.

(6) 「男はスケベである. 」の対偶は？

不謹慎と思われた方がいたら御免なさい. よく聞く言葉ですね.「**スケベじゃなければ男じゃない.** 」が正解です.

「A ならば B」の **対偶** は「B ではないならば A ではない」ということです. もしも「A ならば B」が正しいのであれば, 対偶も必ず正しく,「A ならば B」が正しくないのであれば, 対偶も必ず正しくないという性質があります.

(7) 「自分でヒゲを剃らない人のヒゲを必ず剃り, それ以外の人のヒゲは剃らない」という理髪師は自分のヒゲを剃ることができるか？

ラッセルによる「理髪師のパラドックス」と呼ばれる問題です. 答えは「**剃ることも剃らないこともどちらもできない**」が正解です.

剃れると仮定すれば, この人は「自分でヒゲを剃らない人」ではないので, 剃れないはずです. 剃れないと仮定しても, この人は「自分でヒゲを剃らない人」になるので, 剃ることになってしまい矛盾が起きます. つまり, この理髪師は「矛盾のない世界」では生きていけません. 存在を抹消されます. 悲しい結末です.

これは集合論的パラドックスと呼ばれるものです. 最初に提唱したのはラッセルです. 次にラッセルのパラドックスをあげておきます.

★ラッセルのパラドックス

「『自分自身を要素としない集合』の集合」を S とおくと, S 自体も S の要素であるか否かであるが, そのどちらでも矛盾する. 」

上の理髪師のパラドックスはラッセルのパラドックスの一例です.

まとめ

細かい話をしましょう. 次のような論理学的（数学的）解釈があります.

★矛盾律　矛盾律とは「A であること」と「A ではないこと」が同時に成立する場合を言う.

これまでしてきた話は, あえてこのことには目を瞑って,「矛盾」を世間一般でよく言う「矛盾」として扱ってきました. 上の矛盾

律は二律背反律とも言い，日本語の矛盾とは異なるものだと考えました．具体例のところでの「矛盾」も，厳密に言えば「真偽」の「偽」で語るべきところが多くありますが，あえて「矛盾」で通しました．ご注意ください．

最後に面白い話を4つしましょう．

(1)　天使と悪魔がいます．天使は必ず本当のことを言い，悪魔は必ず嘘をつきます．外見で見分けはつきません．天使は天国に住み，悪魔は地獄に住んでいるとしましょう．ある人が死んで，魂が天国と地獄につながる三叉路にきました．もちろん天国に行きたいものとします．三叉路に天使か悪魔かわかりませんが確実にどちらかである存在がこう言いました．
「これから私に1つだけ質問してよい．私は天使か悪魔かわからないが，必ずどちらかである．天使なら必ず本当のことを答え，悪魔なら必ず嘘をつく．ここからは道が左右に2つある．1つの道は天国で，もう1つの道は地獄に通じている．さあ質問せよ．」
さてどんな質問をしますか．

(2)　「 私 = 私のおじいちゃん 」となる状況を考えよ．

(3)　A さんの父は悪い高利貸しの B 君から大金を借りていました．ある日，B 君は A さんと彼女の父に向かってこう言いました．
「もし次のゲームをしてくれるなら，借金は返さなくていいですよ．
中の見えない袋の中に白石と黒石を1個ずつ入れて，A さんがそこから1個選ぶ．
①　A さんが白石を取ったら，私と A さんは結婚する．
②　A さんが黒石を取ったら，私と A さんは結婚しない．
どちらの場合でもあなた方の借金はチャラになります．」
A さんは結婚したくありませんでしたが，黒石を取るチャンスもあります．結局 A さんと父はこのゲームをすることにしました．
B 君には秘策がありました．袋の中に白石を2個いれて，黒石は1個も入れませんでした．ところがその不正をする現場を A さんはこっそり見てしまいました．
さあ，この状況で A さんはどうしたらいいでしょうか．

(4)　次の2つの質問に「はい」か「いいえ」で答えて下さい．
①　あなたは数学が好きですか？
②　あなたは①,②の質問で，1回も「いいえ」と言わない？

答え

(1)　有名な問題なので類題を見かけたことがある人もたくさんいるでしょう. 入試問題になったこともあります. 答えはたくさん考えられます. 一例は「あなたの住んでいる場所は，右の道ですか. 」です. この場合返答は以下の 4 つの可能性があります.

	右が天国	右が地獄
目の前の存在が天使	はい	いいえ
目の前の存在が悪魔	はい	いいえ

⇒　よって,「はい」と言われたら右へ進み,
「いいえ」と言われたら左へ進めばよいのです.

ポイントは「あなたの〜」という言葉によって，相手の立場を質問の中に組み込むことです. こういう文を「**自己言及文**」と言います.

(2)　これはスイスで実際に起こったお話です.

A 君と B さんが結婚しました. B さんには一人連れ子がいました. 娘さんです. この時点で,「A 君 $=$ 娘さんの義父」となります.

その後，驚くことにこの娘さんが A 君の父と結婚したのです！結果「娘さん $=$ A 君の義母」となりました.

この 2 つから,「A 君 $=$ 娘さんの義父 $=$ A 君の義母の義父 $=$ A 君のおじいちゃん」です.

同じように考えれば,「A 君 $=$ A 君の孫」ですし,「A 君の父 $=$ A 君の息子」ともなります. 複雑ですね.

(3)　ゲーム理論の例題です. いろいろな対応策が考えられます. 相手の不正を指摘するのは次善策でしょう. 模範解答例としては次のようなものになるでしょうか.

「そのままゲームをして，袋から 1 個取る. 次の瞬間それを遠くに投げてしまう. そしてこう言う.『袋の中には白黒 1 個ずつあったのだから，袋の中を調べれば私が取った石がわかる.』と. 袋の中には白石が残っているので，A さんが取った石は黒. よって B 君と結婚しなくていい. めでたしめでたし.」

これぞ起死回生の逆転術といえるでしょう. 遠くに投げることが無理なら，飲み込むという非常手段をとる必要があるかもしれませんが，大勢に影響はありません. 自分が取った石がわからないようにして，残った石を調べようという状況にもっていけばいいのです.

B 君からすれば，技をかけようとして，返し技をくらったわけですが，柔道でもそうですよね. 技をかけようとする瞬間が危ないものです.

この話から言えることは，あるルールの中でどうしようもない状況（この話ならどちらの石を取っても負けという状況）になったときは，そのルールを変えてしまえばいいということです. 土俵を広げたり，小さくしたり，浮かしたり，$\cdots$. そうすることによって自分に有利な状況にしてしまう.

絶体絶命の中で生き延びる術を探すことは矛盾しています. そういう状況になったら **ルール変更** という荒業を考えてみましょう. 数学の世界でもそうやって新しい分野が開拓されていきました. 現実世界で窮地に陥っても一発逆転は可能でしょう. よく言うことですが，何事も諦めたらおしまいですよね.

(4)　②の質問がポイントです. ②の質問には「はい」としか答えられません.「いいえ」と答えると「いいえ」と言わないことに矛盾してしまいますね. よって②の質問には「はい」と答えるしかないのですが，これで「いいえ」を 1 回も言わないことに同意したことになりますから，①の質問にも「はい」としか答えられません.（笑）

この質問はアメリカの論理学者レイモンド・スマリヤンやジャック・コティックが提唱した **脅迫論理** と言われるもので，質問文にもかかわらず，何かを相手に強制することが可能になります. 矛盾の逆用例ですが，質問文だからと侮ると怖いですね（笑）.

では最後に一言.「私は嘘つきです（笑）.」みなさんご注意ください.