計数と計量の話

小学生の算数で学ぶ「数」には 2 種類あります. それは「計数」と「計量」です.「計数」は数えることであり,「計量」は大きさを測ることです.

最初に問題からして頂きましょう. 次の例題を計算して下さい.

例題 1　1 から 100 まで整数は何個ありますか.

例題 2　100 から 200 まで整数は何個ありますか.

例題 3　5 月 5 日の 10 日後は何月何日ですか.

例題 4　5 月 5 日から数えて 10 日目は何月何日ですか.

例題 5　1.02 と 1.2 はどちらが大きいですか. また, その差はいくらですか.

例題 6　$\dfrac{2}{3}$ と $\dfrac{3}{4}$ どちらが大きいですか.

例題 7　$A \times \dfrac{7}{6}$ と $A \times \dfrac{8}{7}$ どちらが大きいですか.

例題 8　$A \div \dfrac{9}{8}$ と $A \div \dfrac{8}{7}$ どちらが大きいですか.

例題 9　3 は 2 の何倍ですか. また, 2 は 3 の何倍ですか.

例題 10　A の 10 %増しは A の何倍ですか. また, A の 10 %引きは A の何倍ですか.

例題 11　A の 4 倍は A の何%増しですか. A の 0.65 倍は A の何%引きですか.

よく考えて, しっかり計算してから, 解答を見て下さい.

解答

例題 1 から 4 までは**「計量」**（数えること）についての問題でした.

例題 1　1 から 100 まで整数は何個ありますか.

$1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ と考えて，　**答え　100 個**

これは素直に整数の「数える」性質からわかります. 例えば，1 から 10 までに整数は 10 個あります. 1 から「数える」ことが「計数」の基本で，みな小さいころから訓練されているためここでつまづく子は，単に考えすぎなだけです（笑）. 間違えても笑って次の問題にいきましょう.

例題 2　100 から 200 まで整数は何個ありますか.

$200 - 100 = 100$ で，100 個 は間違えです.
例題 1 で，$100 - 1 = 99$ 個 としていいのか，よく考えて下さい. 答えは 100 個ですから，単純な引き算は間違えですね.

答え　101 個

1 から 100 の整数の個数は，$100 - 1\mathbf{+1} = 100$ 個 と考えればよいことに気づくと，100 から 200 の整数の個数は，$200 - 100\mathbf{+1} = 101$ 個 となります. この「＋1」の 1 個を最初の「100」と考えることができた人は，計数感覚がしっかりしています.

また $200 - 99 = 101$ 個 も素晴らしい考え方です. 100 の 1 つ前の 99 までに正の整数は 99 個ありますから，1 から 200 までの 200 個から引けばいいということです.

例題 3　5 月 5 日の 10 日後は何月何日ですか.

5 日 + 10 日後 = 15 日 で正解です.
答え　5 月 15 日

これも「計数」の問題です. 10 日後は単純に **+10** すればよいのです.

例題 4　5 月 5 日から数えて 10 日目は何月何日ですか.

$5 + 10 = 15$ は間違えです.
最初の日を入れて考えてますので，10 日目ということは，$10 - 1 = 9$ 日後になりますから，
5 日 + 9 日後 = 14 日 が正解です.
答え　5 月 14 日

ここまでの問題は，「計数」（数えること）をテーマにしています.
ものを数えるのに **早い方法** は足し算，かけ算です. 簡単な例を常に意識すれば，難しい問題に応用できます.

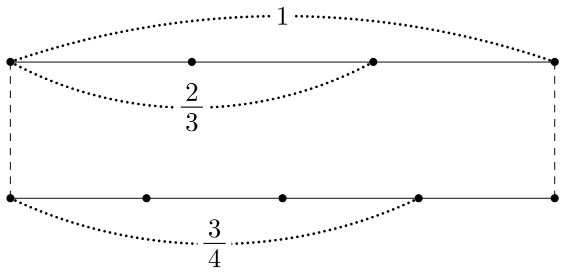
ここからは**「計量」**（大きさを測ること）をテーマにしています.

例題 5　1.02 と 1.2 はどちらが大きいですか. また，その差はいくらですか.

$1.2 - 1.02 = 1.20 - 1.02 = 0.18$
答え　1.2 の方が 0.18 大きい.

例題 6　$\dfrac{2}{3}$ と $\dfrac{3}{4}$ どちらが大きいですか.

大小関係を考えることが「計量」の基本です. 視覚的に表すと, 下の線分図になります.



よって, $\dfrac{3}{4}$ の方が大きいことがわかります.
正確に大きさを考えるなら,

$\dfrac{2}{3}=2\div 3=0.66666\cdots$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{3}{4}=3\div 4=0.75$

よって, $\dfrac{3}{4}$ の方が大きいですね. **答え** $\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

もちろん分母の通分でもわかりますね. $\dfrac{8}{12}$ と $\dfrac{9}{12}$ です. しかし上の線分図の感覚でわかることの方が重要です. 常に線分図でイメージできるようにしましょう.

例題 7 $\quad A\times\dfrac{7}{6}$ と $A\times\dfrac{8}{7}$ どちらが大きいですか.

「$\dfrac{7}{6}$ と $\dfrac{8}{7}$ どちらが大きいですか. 」という問題と同じです.

$\dfrac{7}{6}=7\div 6=1.166666666666\cdots$
$\dfrac{8}{7}=8\div 7=1.142857142857\cdots$
よって, $\dfrac{7}{6}$ の方が大きいですね. **大きい数をかければ大きくなります.**

答え $\boldsymbol{A\times\dfrac{7}{6}}$

例題 8 $\quad A\div\dfrac{9}{8}$ と $A\div\dfrac{8}{7}$ どちらが大きいですか.

$A\div\dfrac{9}{8}=A\times\dfrac{8}{9}$
$A\div\dfrac{8}{7}=A\times\dfrac{7}{8}$
ですから,「$\dfrac{8}{9}$ と $\dfrac{7}{8}$ どちらが大きいですか. 」という問題と同じです.

$\dfrac{8}{9}=8\div 9=0.888888\cdots$
$\dfrac{7}{8}=7\div 8=0.875$
よって, $\dfrac{8}{9}$ の方が大きいですね. **小さい数で割れば大きくなります.**

答え $\boldsymbol{A\div\dfrac{9}{8}}$

例題 9 $\quad$ 3 は 2 の何倍ですか. また, 2 は 3 の何倍ですか.

$3\div 2=\dfrac{3}{2}\quad\Rightarrow\quad$ 3 は 2 の $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$ 倍
$2\div 3=\dfrac{2}{3}\quad\Rightarrow\quad$ 2 は 3 の $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$ 倍

日本語の「の」には，かけ算の意味があります．
上の例でいえば，2 の $\dfrac{3}{2}$ 倍は，$2 \times \dfrac{3}{2} = 3$ です．

例題 10　A の 10 %増しは A の何倍ですか．また，A の 10 %引きは A の何倍ですか．

10 %は「0.1」ですから，10 %増しは元の割合「1」に比べると，$1 + 0.1 = \mathbf{1.1}$ 倍
10 %は「0.1」ですから，10 %引きは元の割合「1」に比べると，$1 - 0.1 = \mathbf{0.9}$ 倍

例題 11　A の 4 倍は A の何%増しですか．A の 0.65 倍は A の何%引きですか．

「4」は元の割合「1」に比べると，$4 - 1 = 3$ 増えています．
割合「3」を%にすると，300 %ですから，**300 %増し** が正解です．

「0.65」は元の割合「1」に比べると，$1 - 0.65 = 0.35$ 減っています．
割合「0.35」を%にすると，35 %ですから，**35 %引き** が正解です．

先にあげた例題が全て即答できれば，小学生で学ぶべき「計数」と「計量」の基本知識はマスターしているといえます．次に「計数」と「計量」について詳しく考えていきたいと思います．

計数感覚

① $1,2,3,\cdots$ と数えることができる．
② 個数差を意識して，引き算を使える．
③ 数える工夫として，かけ算を使える．
④ ③ の逆算的な道具として，割り算の商や余りを的確に使える．
⑤ 和，差，積，商と余りを用いながら，数える工夫を常に意識できる．

難しいのは④です．②の引き算で逆算を強く意識させることや，③のかけ算の訓練を十分にすることなども必要ですが，常日頃から逆算の発想を意識づけすることが重要になります．

例えば，子供は大人に連れられていろいろな所に行くと思います．その帰り道で子供に「次はどっち？」というような質問をしてみると，逆算力を鍛えることができると思います．行きの道を逆にたどれば帰ることができる．元の場所に戻ることができる．この感覚は算数・数学でも強く働きます．

小学校低学年では算数は簡単で，満点もよく取れたのに，徐々に難しくなって高学年ではなかなか満点が取れなかったという経験をお持ちの方も多いのではないでしょうか．図形問題が苦手だったなどのケースを除いて，計数と計量に関してだけ考えますと理由は 2 つあると思います．

1 つは計数感覚の訓練が十分でなかったケースです．もう 1 つは計量感覚がなかなか実感できなかったケースです．後者については計量感覚の箇所でお話しします．

計数感覚がある生徒は，計量感覚も養われやすいのを私は日々実感しています．計数感覚のあるなしのチェックとして私がよく使うのは，「60 の約数を全部言って．」というものです．60 は 1 から 6 の整数全てで割り切れる最小の数ですから，計数感覚があるかどうかの判定としてかなり有効だと考えています．計数感覚があるとは，数える感覚があるということで，整数問題がいい判定法になります．計数感覚を鍛えるのにいい問題は規則性の問題です．これも結局は整数問題の 1 種と言ってもいいでしょう．中学入試では周期算や数列，整数問題などで問われます．

最後に余談をしましょう．中国や日本では生まれたときを 1 歳と考える数え年（かぞえどし）というものがあります．これが計数感覚の例の 1 つです．他の例として，暦の年数もほとんどの国で計数感覚です．例えば西暦は，イエス・キリストが生まれた年を西暦 1 年として，次の年を 2 年，その次を 3 年というように計数感覚で定められました．（近年の研究ではキリストの生年が正しくないという話も聞きますが，ここでは本筋と関係ないので無視します．）これが計量として不十分な理由は，西暦には 0 年がないためです．西暦 2010 年から 2011 年前は，$2010-2011=$ 西暦 -1 年 $=B.C.1$ 年 とはならないのです．0 年がありませんから，西暦 2010 年の 2011 年前は，$B.C.2$ 年になります．そのため，西暦は数直線上に表しても西暦が座標にはなりません．つまり計量的に扱えないということです．計量的に扱うためには 0 年が必要になりますが，平成元年が平成 1 年を表すように，たいていの暦には 0 年はありません．ちなみにインドの国定暦には 0 年があります．さすが 0 を生んだ国です．ですからインドの国定暦は，計数的性質だけでなく，計量的性質も併せ持っていることになります．

計量感覚

① 小数を理解し，大小関係がわかる．
② 線分図（数直線）と分数の関係が理解できる．
③ 等分を意識して線分図（数直線）を描ける．
④ 大小関係を常に意識できる．
⑤ 比と線分の長さを関連させて道具として使える．（線分図で問題が解ける）
⑥ 割合を道具として使える．
⑦ 数直線上の点と座標の関係がわかり，道具として使える．（中学 1 年生）

おそらく小学生が最初に習う計量的な数は小数，分数でしょう．教科書にある例題も水量などを用いてそれらについて考えさせることが多いと思います．計数との最大の違いは，イメージ化が難しいということです．歴史的にも計数感覚よりも遅い誕生でした．小学生で算数が苦手な子はたいていここで引っ掛かります．

まず引っ掛かるのは小数や分数の計算です．計数的な数である整数の足し算やかけ算などは簡単に例題を思いうかべることが可能で，イメージしやすいものですが，計量はそうはいきません．特にかけ算のイメージが劇的に変わります．

それまでかけ算は「数を大きくする」イメージでした．しかし，かけ算の本質がそうではないことに気付かなければいけません．先

生がそのことについて説明してくれないこともあるでしょう. すぐに適応できる生徒もいますし, 機械的な計算作業を繰り返しているうちにいつのまにか身に着く子もいますが, いつまでも実感できない生徒がいることも事実です.
　かけ算は「数を大きくする」魔法ではありません. それでは元の姿に戻れません. かけ算は「数を大きくしたり, 小さくしたりする」魔法なのです. 1 より大きい数をかけると大きくなり, **1 より小さい数をかけると小さくなる** ということを私は何度も授業で繰り返します. これをうるさくを教えなくてはいけません.
　さら, に割り算はその逆算ですから, 1 より大きい数で割ると小さくなり, **1 より小さい数で割ると大きくなる** ことも重要です. この感覚があると, 割合（倍率）というものの理解が早いです.

　計量感覚の判定法として私がよく使うのは「$A:B=2:3$ です. B は A の何倍？」というものです. 例題でも取り上げました. 答えがあったら「じゃあ, A は B の何倍？」というように逆についても聞きます. 完全な判定法ではもちろんありませんが, この問題は判定法としてだけではなく, 計量感覚を鍛えるのにも一役買います.

　生徒に口を酸っぱくして「大きい小さいを間違えるな. 」とよく言います. このことは小学生が学ぶ算数の中で最重要なことではないかとも考えています. 比の答えを逆にして間違えたなんてことは誰しも経験したと思いますが,「逆にしちゃった」ことを軽く考えてはいけません. たまに見かけるのは, 大きい小さいについて考えず, ランダムで答えを書くケースです. たまたま答えがあう. あわなかったら逆の答えを書く. なんてパターンです. 悲しいことですがよく見かけます. 私が思うに, これは最も罪が重いケースと言えます. なぜならば, これは視野がせまいことの証明であり, しかもこれからの学習効果も期待できないからです.
　具体的な話をしましょう. 例えば, スピードが速いことは, 速度という数が大きいことです. 速く動けば, 早く目的地に着きます. つまりかかった時間は短くなるということで, 時間という数は小さくなります. 速さの問題ではこういったことを考えて, 逆比というものについて勉強します. 逆比が割り算と関係があり, そこには小数分数のかけ算・割り算で学んだ感覚と, 現実の出来事をすり合わせて, 計量感覚は鍛えられていきます.
　こういった計量感覚を問う問題でミスしたときは, 計算の矛盾があるのと同時に, 常識や経験に則ることもできなかったという二重のミスがあります. 視野を大きくしたり, 違った方向から考えて解決できた可能性もあります.
　大小の判定は計量感覚を問う最適な問題です. 大小の判定は様々な方法があり, 計算の形や問題文で起こった出来事を調べればわかることはもちろんです.「兄と弟の所持金～」といったように兄の方がおそらく多いだろうといった予測もできます. たいていの場合, 視野を変えれば大小は判定できるのです. 判定が難しい場合は, それまで培った計量感覚が支えてくれます. そのために常日頃から大小を意識させねばなりません. しかし残念なことに, 比をランダムに書く生徒はこういった頭の中での努力を放棄してしまっているのです.
　計量感覚は極論すれば大小の判断ができるかどうかと言えます. A 社の製品は安いが壊れやすく, B 社の製品は高いが長持ちするなどの判断時も, 値段の大小と, 使用年数の大小を比較して, どっちが得か判断できます. もちろん現実ではデザインや使い心地, 周囲の人間関係（知り合いにすすめられた. 旦那のお得意先が A 社だから）など様々なことを考慮するでしょう. しかしコストパフォーマンスの大小を数で判定することは大きな指針になります. 会社で 2 つのプロジェクトのうちどっちを選ぶか, 試作品 2 つのうちどちらを商品化するか, 円と外貨どちらで預金した方が得か, A というカードと B というカードどちらを切るか, 子供の将来を考えた場合, 計量感覚ほど大事な感覚は, 算数では他にないとも言えるのではないでしょうか.
　ですから生徒の大小感覚にはとても注意しています. 少しでも怪しい場合はすぐに発問して確かめますし, 比を逆にした場合はすぐつっこみます（笑）. ミスを深く反省しているか. 次間違えないためにどう考えればいいのか. そういったことをすぐに考えてもらえるようにしています.

まとめ

　人間社会には, いろいろな数があふれています. 新聞を賑わす雇用統計, 失業率, 株価, 放射線量, 首位とのゲーム差, テストの点数, 偏差値, …, どの数値にも意味があり, 必ず計数と計量のどちらかと言えます. そういった数に翻弄されて, 本質が見えないということでは困ります. 数で判断できることはその物事の 1 つの側面にすぎないことに注意して下さい. 私の場合, 数（理屈）と感情のどちらか選べと言われたら, 迷いなく感情を取ります（笑）.「敵を知れば百戦危うからず」ではありませんが, 数に踊らされないために, 数を学習することの意味を考えていただける機会になったら幸いです.
　最後になりましたが, 最も言いたかったことを言います.「算数の点数がいいこと」と「算数ができること」と「頭がいいこと」は全く別問題です（笑）.「算数の偏差値が高い」ことは, そのテストで算数の問題がよく解けただけのことです. 問題のテーマを理解して, 新しい視野を得られたかどうかは別の話になります. 偏差値を周囲の人間と比べるのではなく, 前回のテストの自分の偏差値と比べて下さい.（もちろん広い意味で言えばこれも周囲の人間と比べることになりますが…）
　昨日の自分, 今日の自分, 明日の自分を比べて, 日々努力できるかが重要だと思います.