方程式と図の関係

1. 一次方程式を線分図で解く

一次方程式は線分図 で，**二次方程式は面積図** で解くことができます．最初に線分図についてお話します．

例題 1　子供たちに一人 5 個ずつチョコレートを配ったら 40 個余り，一人 2 個ずつ配ると 160 個余った．子供は何人いるか求めよ．

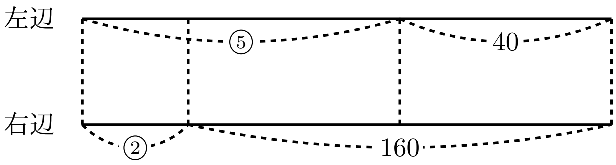
子供の人数を x 人とすれば，
一人 5 個ずつ配ったら 40 個余り　⇒　チョコレートの数 $= 5 \times x + 40$
一人 2 個ずつ配ると 160 個余り　⇒　チョコレートの数 $= 2 \times x + 160$

よって，$5 \times x + 40 = 2 \times x + 160$ を x について解けばよいのです．

まず，**方程式** として解いてみましょう．
以下「$\times$」を省略しています．「$2x$」とは「$2 \times x$」もしくは「$x \times 2$」の意味です．

$$\begin{aligned} 5x + 40 &= 2x + 160 && \leftarrow \text{「}\times\text{」を省略} \\ 5x - 2x &= 160 - 40 && \leftarrow \text{移項} \\ 3x &= 120 \\ \boldsymbol{x} &\boldsymbol{=} \boldsymbol{40} && \cdots \text{答え} \end{aligned}$$

では，**線分図** で解いてみましょう．「$=$」の左側を **左辺**，右側を **右辺** と言います．
x を①とおいてみると，$5 \times x$ は⑤，$2 \times x$ は②と書けるので，



★ 線分図のテクニック　二本線は差を考えろ
⑤と②との差と 160 と 40 の差が等しいから，

⑤ − ②　=　160 − 40
③　=　120
①　=　120 ÷ 3　　←★丸一算（○の中の数字で割ると①が求められる．）
①　=　40
∴　$\boldsymbol{x = 40}$　…答え

★丸一算は中学受験の重要テクニックで，数学における一次方程式を解くことと同じです．
割合の問題も次のように全て丸一算で考えることが可能です．

例題　A 君の所持金の 60 ％は 3600 円である．A 君の所持金はいくらか．

A 君の所持金を①と考えれば，
0.6　=　3600
①　=　$3600 \div 0.6 = 5000$ 円　　←★丸一算（○の中の数字で割ると①が求められる．）

類題 1　次の方程式を線分図を用いて解け．

$x \times 4 + 190 = x \times 11 + 15$

類題 2　次の方程式を線分図を用いて解け．

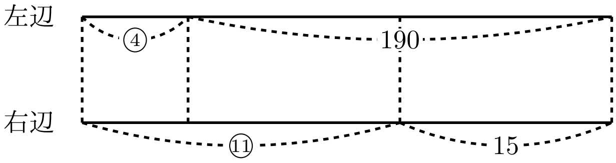
$(x - 70) : (x - 30) = 3 : 5$

類題 1　次の方程式を線分図を用いて解け.

$x \times 4 + 190 = x \times 11 + 15$

解答

x を①とおくと, $x \times 4$ は④, $x \times 11$ は⑪と書けるので,



★ 線分図のテクニック　二本線は差を考えろ

⑪と④との差と 190 と 15 の差が等しいから,

⑪ − ④　=　190 − 15

⑦　=　175

①　=　$175 \div 7$　　←★丸一算（○の中の数字で割ると①が求められる.）

①　=　25

$\therefore$　$\boldsymbol{x = 25}$　…答え

類題 2　次の方程式を線分図を用いて解け.

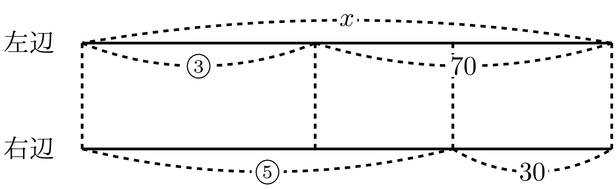
$(x - 70) : (x - 30) = 3 : 5$

x の代わりに $\boxed{}$ と書いてあることも多いでしょう.

★ $\boxed{}$ が 2 つある場合は線分図　←一次方程式で解ける問題は線分図で解ける.

解答

x から 30 を引いたものと 70 を引いたものとの比が $3:5$ である. それぞれを③, ⑤とすれば,



★ 線分図のテクニック　二本線は差を考えろ

③と⑤との差と 70 と 30 の差が等しいから,

⑤ − ③　=　70 − 30

②　=　40

①　=　$40 \div 2$　　←★丸一算（○の中の数字で割ると①が求められる.）

①　=　20

$\therefore$　$\boldsymbol{x}$ = ③ + 70 = $20 \times 3 + 70 = \mathbf{130}$　…答え

2. 二次方程式を面積図で解く

例題 2　正方形の土地がある．横の長さを $6\,\mathrm{m}$ 増やした長方形の面積が $160\,\mathrm{m}^2$ であるとき，元の正方形の土地一辺の長さを求めよ．

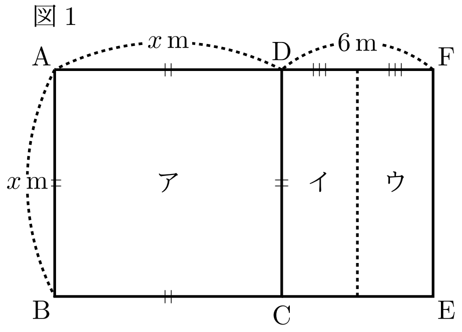
正方形の一辺を $x\mathrm{m}$ とおくと，$x \times x + x \times 6 = 160$ を x について解けばよい．

まず，**方程式** を解いてみましょう．以下「×」を省略し，「$x \times x$」を「x^2」と表しています．

$$\begin{aligned} x^2 + 6x &= 160 && \leftarrow \text{「×」を省略} \\ x^2 + 6x - 160 &= 0 && \leftarrow \text{移項} \\ (x+16)(x-10) &= 0 && \leftarrow \text{左辺を因数分解} \\ x = -16 \text{ 又は } x = 10 & \quad \Rightarrow && x > 0 \text{ より } \boldsymbol{x = 10} \quad \cdots\text{答え} \end{aligned}$$

では，**面積図** で解いてみましょう．

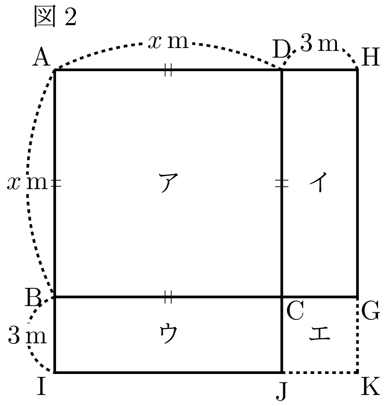
図 1



問題文を面積図で表すと左図のようになります．
長方形 ABEF（ア + イ + ウ）の面積が $160\,\mathrm{m}^2$ ということです．

ここで $6\,\mathrm{m} \times x\,\mathrm{m}$ の長方形 DCEF をたてに 2 つに分けて，
その分けた半分の長方形（ウ）を正方形 ABCD（ア）の下に移動しましょう．
それが次の図 2 です．

図 2



正方形 ABCD（ア）+ 長方形 DCGH（イ）+ 長方形 BIJC（ウ）$= 160$
であり，四角形 CJKG（エ）は一辺 $3\,\mathrm{m}$ の正方形だから，
正方形 CJKG（エ）$= 3 \times 3 = 9\,\mathrm{m}^2$

つまり 正方形 AIKH（ア + イ + ウ + エ）$= 160 + 9 = 169\,\mathrm{m}^2$
$13^2 = 13 \times 13 = 169$ となりますから，
正方形 AIKH の一辺の長さは $13\,\mathrm{m}$

$\therefore \quad x = 13 - 3 = \mathbf{10\,m}$　…答え

★二次方程式を面積で解くコツ
わかっている長さ（ここでは $6\,\mathrm{m}$）を **半分** にすることです．
二次方程式の解の公式を導くときに平方完成をしますが，そのときの $\dfrac{b}{2a}$ の分母の 2 がこのコツと関係しています．

例題 3　次の方程式を解け.

$10x - x^2 = 21$

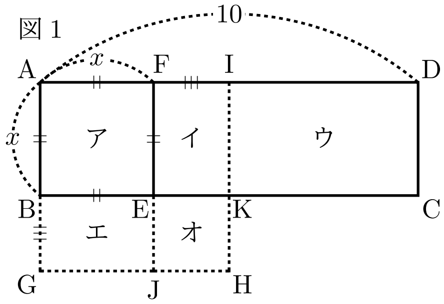
まず方程式として解いてみましょう.

$$\begin{aligned} -x^2+10x-21 &= 0 && \leftarrow \text{移項} \\ x^2-10x+21 &= 0 && \leftarrow \text{両辺} \times (-1) \\ (x-3)(x-7) &= 0 && \leftarrow \text{左辺を因数分解} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x = 3}$ **又は** $\boldsymbol{x = 7}$　…答え

では, 面積図で解いてみましょう.
まずは x が 10 の半分である 5 よりも短い場合について考えてみます.

図 1



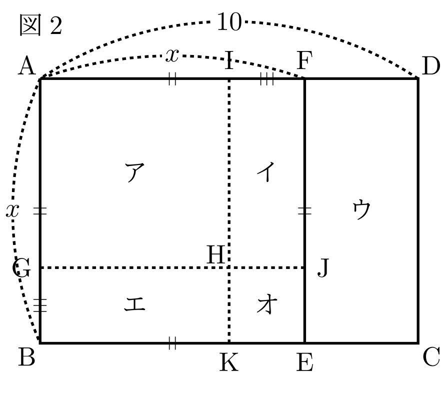
問題文を面積図で表すと左図のようになります.
ここで長方形 FECD（イ + ウ）の面積が 21 になります.

★二次方程式を面積で解くコツ
わかっている長さ（ここでは 10）を **半分** にします.
四角形 AGHI（ア + イ + エ + オ）は, 10 の半分 5 を一辺とする正方形です.

以下, 面積について考えます. 正方形 AGHI の面積は ア + イ + エ + オ $= 5^2 = 25$ です.
この式で ア + イ = ウ , エ = イ であることに注目すれば,
左辺 = (ア + イ) + エ + オ = ウ + イ + オ = 21 + オ ですから,
正方形 EJHK（オ）は $25 - 21 = 4$ ⇒ 正方形 EJHK（オ）は一辺の長さが 2 の正方形と言えます.
よって $\mathrm{BG} = 2$ ⇒ $x = \mathrm{AG} - \mathrm{BG} = 5 - 2 = \mathbf{3}$　…答え

次に x が 10 の半分である 5 よりも長い場合について考えてみます.

図 2



問題文を面積図で表すと左図のようになります.
ここでは長方形 FECD（ウ）の面積が 21 になります.
四角形 AGHI（ア）は, 10 の半分の 5 を一辺とする正方形です.
面積について考えますと, ウ = 21 であり, ア $= 5^2 = 25$ です.
長方形 ABKI（ア + エ）と長方形 IKCD（イ + オ + ウ）は同じ長方形なので,
ア + エ = イ + オ + ウ です. ここで エ = イ に注目すれば,
ア = オ + ウ ⇒ 25 = オ + 21
逆算すれば正方形 HKEJ は オ = 4 となります.
$4 = 2^2$ ですから, 正方形 HKEJ（オ）の一辺の長さは 2.
よって $\mathrm{GB} = 2$ ⇒ $x = \mathrm{AG} + \mathrm{GB} = 5 + 2 = \mathbf{7}$　…答え

類題 3　次の方程式を面積図を用いて解け.

$x \times x + 10 \times x = 264$

類題 4　次の方程式を面積図を用いて解け.

$x \times x = 10 \times x + 24$

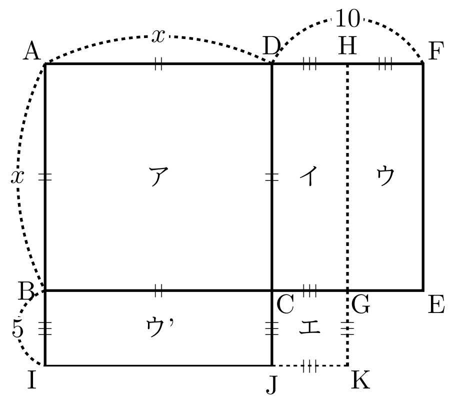
類題 5　次の方程式を面積図を用いて解け.

$x(x-1) = 1$

類題 3　次の方程式を面積図を用いて解け．

$x \times x + 10 \times x = 264$

解答

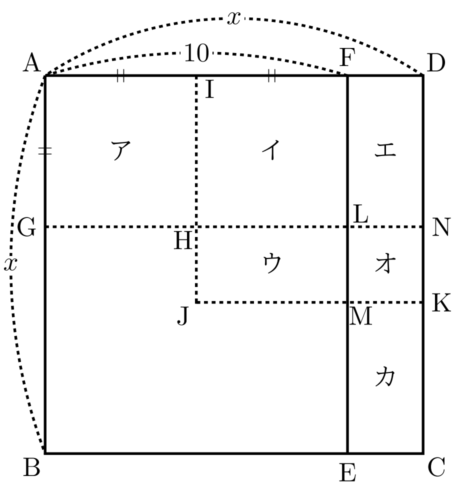


問題文を面積図で表すと長方形 ABEF（ア＋イ＋ウ）の面積が 264 です．
ここで $10 \times x$ の長方形 DCEF をたてに 2 つに分けて，
その分けた半分の長方形 HGEF（ウ）を正方形 ABCD の下に移動すると，
正方形 ABCD（ア）＋長方形 DCGH（イ）＋長方形 BIJC（ウ′）$= 264$ です．
四角形 CJKG（エ）は一辺 5 の正方形ですから，正方形 CJKG $= 5^2 = 25$
つまり 正方形 AIKH（ア＋イ＋ウ′＋エ）$= 264 + 25 = 289$
$17^2 = 289$ より，AI $= 17$　⇒　$x = 17 - 5 = \mathbf{12}$　…答え

類題 4　次の方程式を面積図を用いて解け．

$x \times x = 10 \times x + 24$

解答



問題文を面積図で表すと左図のようになります．
式の左辺の $x \times x$ を正方形 ABCD の面積，
式の右辺の $x \times 10$ を長方形 ABEF の面積と考えれば，
長方形 FECD（エ＋オ＋カ）の面積が 24 と考えられます．

四角形 AGHI（ア）は，10 の半分の 5 を一辺とする正方形とします．
そして，四角形 IJKD（イ＋ウ＋エ＋オ）も正方形とします．
この正方形の一辺の長さは ID $= x - 5$ となります．

すると DI $=$ DK より，KC $=$ AI $= 5$ ですから，
四角形 LMKN（オ）は正方形となり，ウとカの面積は等しくなります．

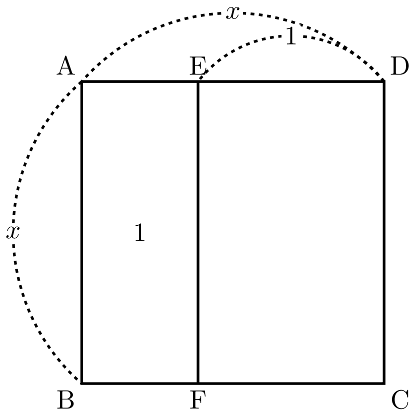
アとイは一辺の長さが 5 の正方形ですから面積は，ア $=$ イ $= 5^2 = 25$.
ウ $=$ カ ですから，ウ＋エ＋オ $=$ エ＋オ＋カ $= 24$.
よって正方形 IJKD の面積は，イ＋ウ＋エ＋オ $= 25 + 24 = 49$.
$7^2 = 49$ ですから，正方形 IJKD の一辺の長さは 7 とわかります．

よって ID $= 7$　⇒　$x = \mathrm{AI} + \mathrm{ID} = 5 + 7 = \mathbf{12}$　…答え

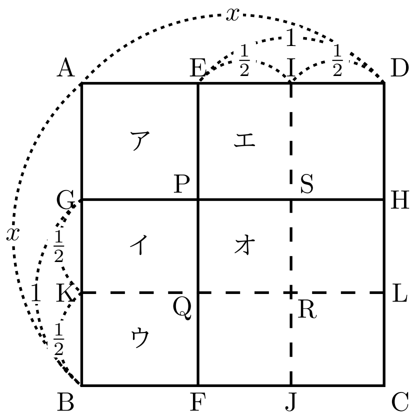
類題 5　次の方程式を面積図を用いて解け．

$x(x-1)=1$

解答



長方形 ABFE の面積が 1 です．
GB $=1$ となる点 G を AB 上にとり，
AD と平行な横線 GH を引く．
ED の中点 I を通る縦の線 IJ,
GB の中点 K を通る横の線 KL を引く．(左下図)



ア $+$ イ $+$ ウ $=1$
図からウ $=$ エであるから，
ア $+$ イ $+$ エ $=1$
正方形 PQRS(オ) の一辺の長さは $1\div 2=\dfrac{1}{2}$
だから，オの面積 $=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$
正方形 AKRI の一辺の長さは　$x-\dfrac{1}{2}$
面積は　(ア $+$ イ $+$ エ) $+$ オ $=1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$
よって　$x-\dfrac{1}{2}=\sqrt{\dfrac{5}{4}}$

$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}}$　…**答え**

知る人ぞ知る **黄金比** である．
平方根を用いて表す 2 次方程式の解も，これまでと同様に面積図で解ける．