0 で割ると世界が壊れる話

1. 0 で割るとどんな式が生まれるか.

次の例題を計算して下さい.

例題 1 $1 \div 0$

中学 3 年生以上の方は次の例題も考えてみて下さい. 最後の式が $\mathbf{0 = 1}$ ですから, 明らかに矛盾しています. どこの式変形がおかしいのか考えてみて下さい.

例題 2

$$
\begin{array}{rcll}
x & = & 1 & \cdots ① \\
-x & = & -1 & \cdots ② \text{ 両辺} \times (-1) \\
x^2 - x & = & x^2 - 1 & \cdots ③ \text{ 両辺} + x^2 \\
x(x-1) & = & (x+1)(x-1) & \cdots ④ \text{ 両辺を因数分解} \\
x & = & (x+1) & \cdots ⑤ \text{ 両辺} \div (x-1) \\
0 & = & 1 & \cdots ⑥ \text{ 両辺} - x
\end{array}
$$

どちらも, 答えは次のページです.

例題 解答

例題 1　　$1 \div 0$

小学生にこの質問をすると多くの方が，0 か 1 と答えます．

もしもこの計算結果が 0 としましょう．
すると　$1 \div 0 = 0$　ですね．
逆算をすると，　$0 \times 0 = 1$
ん？　$0 = 1$？

では，もしもこの計算結果が 1 としましょう．
すると　$1 \div 0 = 1$　ですね．
逆算をすると，　$1 \times 0 = 1$
ん？　$0 = 1$？

実は，この $0 = 1$ という式が私たちの世界を壊す鍵になってしまいます．
あとで詳しいお話をします．よく覚えておいて下さい．

正解
$1 \div 0$ は，**してはいけない計算** です．
答えは，**ない** が正解です．

「そんなのあり？」という声が聞こえてきそうですが…，
もちろん，ありです（笑）．
どんな数でも 0 で割ってはいけない のです．よく覚えておいて下さい．上とは違った問題ですが，同じテーマの問題が中学入試にも出題されたことがあります．

例題 2

$$\begin{array}{rcll} x & = & 1 & \cdots① \\ -x & = & -1 & \cdots② \text{ 両辺} \times (-1) \\ x^2 - x & = & x^2 - 1 & \cdots③ \text{ 両辺} + x^2 \\ x(x-1) & = & (x+1)(x-1) & \cdots④ \text{ 両辺を因数分解} \\ x & = & (x+1) & \cdots⑤ \text{ 両辺} \div (x-1) \\ 0 & = & 1 & \cdots⑥ \text{ 両辺} - x \end{array}$$

例題 1 の話をふまえ，方程式の知識が十分にあれば上の変形でおかしいところがわかります．例題 1 でのテーマは，
どんな数でも 0 で割ってはいけない ということでした．

正解
④ ⇒ ⑤ の式変形で，両辺を 0 で割っていることがおかしい．

④ ⇒ ⑤ の式変形で，両辺を $x - 1$ で割っています．
①から $x = 1$ ですから，$x - 1 = 0$ です．よって ④ ⇒ ⑤ の式変形で，両辺を 0 で割っていることになります．どんな数でも 0 で割ってはいけませんから，これはしてはいけない式変形です．この問題は慶応女子高等学校の過去問を少し（かなり？）改めたものです．

ちなみに，方程式の式変形でやってはいけないことは，

方程式の禁則事項 $\begin{cases} \text{・両辺を 0 で割る．} \\ \text{・両辺に 0 をかける．} \end{cases}$

以上の 2 つです．

不定形
$\dfrac{1}{0}$ のように，答えを導くことができない式の形を **不定形** といいます．覚えておきましょう．

$1 \div 0$ をしてしまうと，$1 = 0$ というとんでもない式が生まれました．次のページで，もしも「$1 = 0$」が成り立つ世界があったらどうなるか考えてみましょう．

2.　もしも「$1 = 0$」が成り立てば,「坂本竜馬 = にんじん」が証明できる！

証明してみましょう.（簡単に言えば, 証明とは数学的な説明のことです.）

$1 = 0$ の両辺を 2 倍すると, $2 = 0$ となります.（「=」の左側を左辺, 右側を右辺といい, 両方あわせて両辺とよぶ.）
$1 = 0$ の両辺を 3 倍すると, $3 = 0$ となります.
$1 = 0$ の両辺を 4 倍すると, $4 = 0$ となります.
$\cdots$
$1 = 0$ の両辺を x 倍すると, $x = 0$ となります.

この結果から, $0 = 1 = 2 = 3 = 4 = \cdots = x$ ですね. いい感じに世界が壊れてきました（笑).

となれば,
坂本竜馬先生の頭は 1 個あったはずですが, 0 個といっしょですね.
坂本竜馬先生の手は 2 本あったはずですが, 0 本といっしょですね.
坂本竜馬先生の足は 2 本あったはずですが, 1 本といっしょですね.

だんだんと坂本竜馬先生が変形していきます.

坂本竜馬先生の身長は詳しくは分からないので, $x\,cm$ としましょうか. それは $0cm$ と等しく, また $15cm$ とも等しいでしょう.
坂本竜馬先生のウエスト（胴回り）も詳しくは分かりませんので, $y\,cm$ としましょう. それは $0cm$ と等しく, また $10cm$ とも等しいでしょう.

どうですか, 坂本先生がにんじんの形に大分近づいてきました（笑).

坂本先生に光をあてると反射して, 我々の目に肌色（もしかすると日焼けした, いい褐色かも）の光が飛び込んできます. 光の色も, 周波数という数値で考えれば, それも $640nm$（ナノメートル）と等しいでしょう. ちなみに $640mm$ の光はオレンジ色に見えます.

さあ, これで「坂本竜馬 = にんじん」が証明できました.
まだ完全に「にんじん」とは言えないと思う方もいるでしょう. 同様に,「坂本先生」の色々な部位を変形して「にんじん」に近づけていってください. 思う存分どうぞ（笑).

矛盾って面白いと思いませんか.
矛盾からは何だって証明できるのです.
論理学的に次のことが言えます.
　命題 A が偽であるとき,「$A \Rightarrow B$」は必ず真.（命題 B の真偽に関わらず）
無茶振りされたら, 何を言ってもいいってことです（ちょっと違うか).
また, A を仮定しての推論中に矛盾が起きれば, A は否定されます. これを背理法と言います.
みなさんも色々な矛盾について考えてみて下さい. そこから何か新しいことが生まれるかもしれません.

次のページでこれまでのことをまとめてみたいと思います.

3. もしも「$1=0$」が成り立てば,「なんだって言える」!

2 の証明から, $1=0$ が成り立てば, どんな「もの」だって等しいことを証明できます.

むちゃな式変形ですが,
$1=0$ の両辺を **ミジンコ** 倍すれば（笑), ミジンコ $=0$ となります.
$1=0$ の両辺を **太陽** 倍すれば, 太陽 $=0$ となります.
よって,「ミジンコ = 太陽」ですね（笑).

どうでしょうか. 世界が壊れました（泣).
「$1=0$」は, 世界を壊す禁断の魔法なのです.

原因はなんでしょうか. そう, 0 で割ったからです. 0 で割ったから, 世界が壊れたのです.
世界の秩序を守るために, 0 で割ってはいけません. そういう可能性を数式から除外しなければいけません.
だから, 大学入試では方程式をある変数で割るときに, 0 かそうでないかを場合分けしなければいけないのです.

「$1=0$」を導く可能性がある計算は, 世界を壊す禁断の魔法なのです.
実際にも次のような事件が起こりました. アメリカの軍艦が大西洋上でエンジンが動かなくなりました. 原因は, コンピュータが $1 \div 0$ をしようとしてのフリーズしたのです. エンジンに応急処置をして近くの港まで行けたので事なきを得たのですが, コンピュータエラーにヒューマンエラーがもし重なって, ミサイルが発射されでもしたらと考えると, 怖い話ですよね.

ちなみに計算機で $1 \div 0$ をするとどうなるでしょうか. 興味のある方は, 試しに携帯や *windows* の計算機でやって下さい. 私の携帯電話の計算機では「E」と表示されました. これはエラーの意味です. *windows* ではもっと数学的な解答を言ってくれます（笑).

0 で割ると何でも証明できる話やアメリカの軍艦の話は, チャールズ・サイフェ「異端の数ゼロ」（早川書房）を参照しました. 著者のサイフェは *Seife* とつづるそうなのであまり関係はなさそうですが, 英語でサイファ (*cipher*) は 0 を表します.

以下に類題として 3 問とりあげました. どの式も矛盾が起こります. 想像してみて下さい. 高校生以上の知識が必要になります.
類題 1 $(-1)^{\text{有理数}}$
類題 2 実数 a, b に対して, $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
類題 3 0^0

類題 解答

類題 1　　$(-1)^{\text{有理数}}$

$(-1)^3=-1$ ですが，$3=\dfrac{6}{2}$ と考えると，$(-1)^{\frac{6}{2}}=\sqrt{(-1)^6}=\sqrt{1}=1$ となってしまいます．

この 2 つの結果から，$-1=1 \Leftrightarrow 2=0 \Leftrightarrow 1=0$（…世界を壊す式）

この矛盾から，基本的に $(-1)^{\text{有理数}}$ は不定形です．

注意が必要ですが，負の数の n 乗根 $=(\text{負の数})^{\frac{1}{n}}$（$n$ は整数）は複素数の範囲ならば定義できます（大学入試にはでません）．また，実数の範囲でも n が奇数の場合に限って定義できます（こちらは大学入試にでる可能性はあります）．例えば，

$n=3$ のとき $\sqrt[3]{-1}=-1$（$\because$ $(-1)^3=-1$）と考えることができます．

ただ非常にややこしい問題でもあるので，大学入試でもほとんどみません（$H9$ 年のつくば国際大の計算問題のように間違って作問したであろう問題はみることがあります）．このテーマを発展させ，18 世紀の数学者オイラーは，i^i を考え，

それが無数の実数であることを示しました．19 世紀のリーマンはオイラーの功績を用いて $\sqrt{z}$ に定義を与え，複素解析を発展させました．矛盾が数学の歴史に活力を与えてきたことがわかる事例です．

類題 2　　実数 a,b に対して，$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

a,b ともに負のときこの式は成り立ちません．

$a=b=-1$ とするとき，$\begin{cases} \sqrt{a}\sqrt{b} & =\sqrt{-1}\sqrt{-1}=-1 \\ \sqrt{ab} & =\sqrt{(-1)(-1)}=1 \end{cases}$

例　$\sqrt{-2}\times\sqrt{-8}=\sqrt{2}i\times\sqrt{8}i=-4$ となります．

　決して，$\sqrt{-2}\times\sqrt{-8}=\sqrt{(-2)\times(-8)}=\sqrt{16}=4$ としないようご注意下さい．

類題 3　　0^0

これはとても興味深い議題です．

$0^1=0$，$0^2=0$，$0^3=0$，$\cdots$

この方針を有理数で考えても，$0^{0.1}=0$，$0^{0.01}=0$，$0^{0.001}=0$，$\cdots$．つまり，$x>0$ のとき，$0^x=0$

$1^0=1$，$2^0=1$，$3^0=1$，$\cdots$

こちらも有理数で考えても，$0.1^0=1$，$0.01^0=0$，$0.001^0=0$，$\cdots$．つまり，$x>0$ のとき，$x^0=1$

この 2 つの考え方が昇華できないので，**0 の 0 乗は不定形** とされています．

ちなみに，0^0 はたいていの計算機で 1 をはじき出します．これは便宜上の話で，数学的には不定形です．数値計算（計算機）系の数学者の中には 1 と定義する人もいますし，その方がコンピュータ言語と相性がいいのです．詳しい話が知りたい方は $Wikipedia$ で「0 の 0 乗」を調べてみて下さい．

発展

1. $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^x = 1$ を証明せよ.

過去に大学入試で, $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^x$ について考えさせる問題がありました. 最近でもちらほら見ます.

$x^x = e^{x\log x}$ となるので, $x \to +0$ のとき, $x\log x \to 0$ を証明すればいいのです. 難しい問題ですので, 小問形式で示しましょう. 解答は次ページに示します.

(1) $x > 0$ のとき, $e^x > 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2$ を示して下さい.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ を示して下さい.

(3) $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \frac{\log y}{y} = 0$ を示して下さい.

(4) $\displaystyle\lim_{z\to+0} z\log z = 0$ を示して下さい.

(5) $\displaystyle\lim_{z\to+0} z^z = 1$ を示して下さい.

2. $\sin\theta + \cos\theta = 1$ のとき, 次の計算をせよ.

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

この問題について次のような 2 通りの解法を試みた. どちらが正しいだろうか. 理由とともに記せ.

解法 (1) $\sin\theta + \cos\theta = 1$

$\Leftrightarrow \quad \sin\theta = 1 - \cos\theta$

$\Leftrightarrow \quad \cos\theta = 1 - \sin\theta$

与式

$$= \frac{\sin\theta\,(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)\,(1-\cos\theta)} + \frac{\cos\theta\,(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)\,(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{\sin\theta\,(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta} + \frac{\cos\theta\,(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta\,(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta} + \frac{\cos\theta\,(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta}$$

$$= 1 + 1 = \mathbf{2}$$

解法 (2) $\sin\theta + \cos\theta = 1$

$\Rightarrow \quad (\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \quad \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1$

$\Leftrightarrow \quad \sin\theta\cos\theta = 0$

与式

$$= \frac{\sin\theta\,(1+\sin\theta) + \cos\theta\,(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)\,(1+\sin\theta)}$$

$$= \frac{\sin\theta + \sin^2\theta + \cos\theta + \cos^2\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{(\sin\theta+\cos\theta) + \left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)}{1+\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{1+1}{1+1+0} = \mathbf{1}$$

1.

(1) $x > 0$ のとき，$e^x > 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2$ を示して下さい.

$f(x) =$ 左辺 $-$ 右辺とすると，$f'(x) = e^x - 1 - x$ ，$f''(x) = e^x - 1$

$f'(0) = 0$ かつ $f''(x) > 0$ であるから，$f'(x) > 0$ （ 単調増加でスタートが 0 のイメージ ）

$f(0) = 0$ かつ $f'(x) > 0$ であるから，$f(x) > 0$ （ 単調増加でスタートが 0 のイメージ ）

(2) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ を示して下さい.

(1) から，$0 < \dfrac{x}{e^x} < \dfrac{x}{1 + x + \frac{1}{2}x^2}$

$x \to \infty$ のとき，$\dfrac{x}{1 + x + \frac{1}{2}x^2} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}} \to 0$ であるから「はさみうちの原理」より題意は示される.

(3) $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} \frac{\log y}{y} = 0$ を示して下さい.

$x = \log y$ とおくと，$x \to +\infty \Leftrightarrow y \to +\infty$

このとき，$\dfrac{x}{e^x} = \dfrac{\log y}{e^{\log y}} = \dfrac{\log y}{y}$

ゆえに (2) から，$y \to +\infty$ のとき，$\dfrac{\log y}{y} \to 0$

(4) $\displaystyle\lim_{z \to +0} z \log z = 0$ を示して下さい.

$y = \dfrac{1}{z}$ とおくと，$y \to +\infty \Leftrightarrow z \to +0$

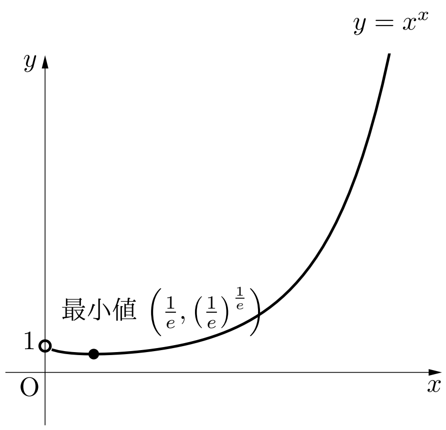
このとき，$\dfrac{\log y}{y} = z \log \dfrac{1}{z} = -z \log z$

ゆえに (3) から，$z \to +0$ のとき，$-z \log z \to 0 \Leftrightarrow z \log z \to 0$

(5) $\displaystyle\lim_{z \to +0} z^z = 1$ を示して下さい.

(4) から，$\displaystyle\lim_{z \to +0} z^z = \lim_{z \to +0} e^{z \log z} = 1$

$x \to 0$ のとき，$x^x \to 1$ であることの証明は以上です. 防衛医科大学 $(H19)$ の入試問題に類題があります.
ちなみに，$y = x^x$（$x > 0$）を図示すると下図のようになります.



$y = x^x$ の両辺をともに正と考えて，自然対数をとると，

$\log y = \log x^x \Leftrightarrow \log y = x \log x$

両辺を微分して，$\dfrac{y'}{y} = \log x + 1$

$\therefore\ y' = x^x (\log x + 1)$

よって，$y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e}$

増減表 →

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$	↗

2.

まず $\sin\theta$ ，$\cos\theta$ を求めてみる．2 変数 2 方程式のイメージなので具体的に解ける．

$$\begin{cases} \sin\theta+\cos\theta=1 & \cdots① \\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1 & \cdots② \end{cases}$$

この連立方程式を解く．

$$① \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta=1-\sin\theta$$

これを②に代入すれば,

$$\sin^2\theta+(1-\sin\theta)^2=1$$
$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2\theta-2\sin\theta=0$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin\theta(\sin\theta-1)=0$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin\theta=0 \text{ 又は } \sin\theta=1$$

これを①に代入して，　$(\sin\theta,\cos\theta)=(0,1)$ 又は $(1,0)$ ．

ということは,

$(\sin\theta,\cos\theta)=(0,1)$ のとき，　与式 $=\dfrac{0}{1+1}+\dfrac{1}{1+0}=1$

$(\sin\theta,\cos\theta)=(1,0)$ のとき，　与式 $=\dfrac{1}{1+0}+\dfrac{0}{1+1}=1$

つまり，**解法 (2) が正しい**．

では解法 (1) のミスはなんであろうか．

最初の式変形で，分母分子に $(1-\cos\theta)$ ，$(1-\sin\theta)$ をかけているのが矛盾を導いている．

上で求めたように，$(\sin\theta,\cos\theta)=(0,1)$ 又は $(1,0)$ であるから，$(1-\cos\theta)$ ，$(1-\sin\theta)$ のいずれか一方は 0 である．

解法 (1) が間違っている理由　分母分子に 0 をかけているので矛盾が起こる．

計算力のある方で解法 (1) を自然と選んだ方はいないだろうか．こういうミスは指摘されるまで気づきにくいものなのでご注意を．