

授業で使っている自作教材（小学生から高校生まで）などをまとめた HP を開設しています。是非ご覧ください。

数学・算数を楽しむために（<http://www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html>）

1 勉強法

- (1) 手を動かせ
- (2) 消しゴムをかけるな（過去の失敗を隠すな & 時間がもったいない）
- (3) 結論を出してから、答えを見ろ（だいたいでもカンでもいい）
- (4) 継続は力なり必要条件是連続性（毎日やれ）
- (5) 夢に見るまで考えろ。（継続は力なり）
- (6) よく寝ろ（夢は記憶の整理の証）
- (7) ひらめきは風漬しのあとにやってくる。
- (8) だいたいを考えろ（*guess & check*）

2 最重要格言

- (1) 手を動かせ。「わかること」と「できること」は違う！
- (2) 先を読め（未来を想像しろ）
- (3) 図・グラフをかけ
- (4) 1, 2, 3 で考える
- (5) 同じものに名前をつける（文字式で表す）。
- (6) 直線図形の基本は三角形
- (7) まだ使っていない数字・条件は？
- (8) 逆を考えろ
- (9) 別解を考えろ。
- (10) なければつくれ（補助線を描こう）
- (11) だいたいを考えろ（*guess & check*）
- (12) アイデアは経験による。たくさんの解法を見て、試みる。
- (13) 矛盾について考えろ

3 抽象性と具体性

1. 求めたいものに名前をつける（ x とおく）
2. 同じものに名前をつける（文字式で表す）。
3. 文字をおいたら定義域を考える癖をつける
4. 数学の理想は全てを抽象化すること、一般化すること。
5. 具体例を考えろ。抽象をイメージするために具体化。
6. 具体化は 1, 2, 3 で考えろ
7. カンが働かないときは、簡単な具体例を考える。
8. 図・グラフをかけ
9. シンプルイズザベスト

4 不変性・対称性

- (1) 求めたいものに名前をつける (x とおく)
- (2) 同じものに名前をつける (文字式で表す).
- (3) 文字をおいたら定義域を考える癖をつける
- (4) 同じものを探して、文字化か式化
- (5) 対称性は循環性
- (6) 解法にも対称性がある
- (7) 最大と最小, 最強と最弱, 最善と最悪を考慮
- (8) 真ん中は真ん中へ

5 論理・必要十分性

- (1) まだ使っていない条件は?
- (2) 証明できない定理を使うな
- (3) 先を読め
- (4) 全てを考慮
- (5) 例外 (変なもの) を愛せ・慈しめ
- (6) 逆と裏を考慮
- (7) 両方考慮
- (8) だめなら原点にもどれ
- (9) なければつくれ (文字をおこう&補助線を描こう)
- (10) 証明は主に 4 通り⇒演繹法・対偶・背理法・数学的帰納法 (他に鳩の巣論法・白黒論法などもある)
- (11) 矛盾について考慮⇒背理法

5.1 見直し・アイデア

- (1) 見直し方法は 4 つ. 逆算, 別解, 概算, 再計算
- (2) 時間がなければ概算で確かめろ (正負のチェック, ケタのチェック, 1 つの文字だけのチェック)
- (3) 逆算を考慮 (方程式を解いたら代入)
- (4) 別解をさがせ (組み合わせの公式のチェックは樹形図)
- (5) だいたいを考慮 (概算)
- (6) 具体例を考慮
- (7) 0 や 1 を代入しろ
- (8) カンが働かないときは, 簡単な具体例を考慮.

6 各テーマ別解法

6.1 計算・式・複素数・指数・対数

- (1) 手を動かせ. 「わかること」と「できること」は違う!
- (2) 式は縦に書け. つまり, 恒等式の変換は次のように縦に書くのがよい.

$$\begin{aligned} & (x+2)^2 - (x-1)^2 \\ &= x^2 + 4x + 4 - (x^2 - 2x + 1) \\ &= x^2 + 4x + 4 - x^2 + 2x - 1 \\ &= 6x + 3 \end{aligned}$$

- (3) 方程式は = を並べる. つまり, 方程式の変換は次のように縦に書くのがよい.

$$\begin{aligned}(x+2)^2 &= (x-1)^2 \\ x^2 + 4x + 4 &= x^2 - 2x + 1 \\ 6x &= -3 \\ x &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

- (4) 逆算を意識しろ
- (5) だいたいを考えろ
- (6) よく出てくるものを命名しろ.
- (7) 恒等式と方程式は違う.

例: $f(x) = g(x)$ とあっても恒等式と方程式で意味が異なる.

恒等式なら, この等式からわかることは 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が同じ関数であるということ.

方程式なら, この等式を解くことで, 共有点の座標が求められる.

- (8) 「変数の数 = 式の数」 \Rightarrow 数字で解ける
- (9) 「変数の数 = 式の数 + 1」 \Rightarrow 全ての変数はある 1 つの変数で表せる
- (10) 文章題は表・図で整理.
- (11) 感情を大切にしろ. (-, 絶対値, $\sqrt{\quad}$ をいやがれ.)
- (12) 1, 2, 3 で考える
- (13) 1 と 0 が全て
- (14) 2 次以上の連立方程式は代入法. 存在感の薄いやつから消せ.
- (15) 2 次式の調査は関数とみてグラフ化.
- (16) 絶対値は場合分けか 2 乗
- (17) 2 次方程式の解が正になる \Rightarrow はじきの条件
- (18) 先を読め&答えを想像しろ ($\rightarrow \infty$ or 究極の先は答え)
- (19) 対称性を考えろ!
- (20) 対称性は循環性
- (21) 対称式は基本対称式で表す.
- (22) 置き換えたら, 定義域・値域のチェック.
- (23) 対数はまず底の統一.
- (24) 整式の次数下げは筆算で.

6.2 図形・三角比

- (1) 図をかけ
- (2) 条件全てを図にかきこめ (長さ, 角度, 等辺記号, 平行記号, 等角記号, 垂直記号, ...)
- (3) 命名. 等辺記号 \Rightarrow 長さ a, b, c, \dots . 等角記号 \Rightarrow 角 θ, ϕ, \dots .
- (4) わかったことは図にかきこめ
- (5) 直線図形の基本は三角形
- (6) 求値は「長さ \Leftrightarrow 面積・体積」.
- (7) 求比は「線分比 \Leftrightarrow 面積比」.
- (8) 図形は幾何学・解析 (座標)・ベクトルの 3 解法で解ける.
- (9) 線対称は軸 (真ん中は真ん中へ)
- (10) 点対称を作れ (回転移動)
- (11) 求めたい長さを文字でおけ \Rightarrow 相似 (方べき)・三平方 (正弦・余弦定理)・逆算 (面積・体積からの逆算)
- (12) 求めたい角度を文字でおけ \Rightarrow 三角比の性質・正弦・余弦定理・円周角・二等辺三角形
- (13) 文字をおいたら定義域を考える癖をつける
- (14) 円があったら方べきの定理
- (15) 三角形の内部の線分比 \Rightarrow メネラウスの定理
- (16) 幾何で解けないならば, 解析「座標を考えて方程式」か線形代数「ベクトル」で解けか複素数「複素平面」で解く.
- (17) 回転移動がからむなら複素平面で解く.

(18) 空間の角度 ⇒ ベクトルで $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$.

6.3 ベクトル・複素平面

- (1) 図をかけ. 何はともあれ図をかけ. イメージできなくても描け.
- (2) 条件全てを図にかきこめ (長さ, 角度, 等辺記号, 平行記号, 等角記号…)
- (3) わかったことは図にかきこめ
- (4) 原点をきめろ
- (5) 平面なら 2 つの基準ベクトル (基底), 空間なら 3 つの基準ベクトル (基底) をきめろ.
- (6) 基準ベクトル (基底) の長さとお積がわかれば, 全てがわかる.
- (7) 求めたい比を $x : (1 - x)$ とおけ
- (8) 交点を知りたいければ, $x : (1 - x)$, $y : (1 - y)$ とおけ
- (9) 文字をおいたら定義域を考える癖をつける
- (10) ベクトルの加減は平行四辺形.
- (11) ベクトルの計算が面倒なら, 幾何「図形」で解け.
- (12) 複素平面の加減は, 平行移動.
- (13) 複素平面の乗除は, 回転移動と拡大縮小.
- (14) 回転・正三角形・正六角形は複素平面.

6.4 解析・微分積分・極限

- (1) グラフをかけ. 何はともあれグラフを描け. 掛けなくても掛け.
- (2) わかったことはグラフにかきこめ
- (3) 座標が知りたいきや, 名前をつけろ (x 座標を p とおく)
- (4) 文字をおきかえ ⇒ 範囲のおきかえ.
- (5) 交点は連立解
- (6) 「接する」⇔「重解」.
- (7) 2 次式の調査は関数とみてグラフ化.
- (8) 境界を意識して場合分け.
- (9) 2 次方程式の解が正になる ⇒ はじきの条件
- (10) 領域は 0 や 1 を入れて確かめろ
- (11) 円がでてきたら, 点と直線の距離を意識しろ (空間座標なら点と面の距離)
- (12) 微積分は計算力
- (13) グラフをかきたいなら微分
- (14) 最大最小を知りたいきや微分
- (15) 面積・体積を知りたいきや積分
- (16) 曲線の長さが知りたいきや積分
- (17) 逆算を意識しろ
- (18) だいたいを考えろ (具体的な数字を入れて正負を間違えるな)
- (19) ミクロとマクロを考えろ
- (20) 数列がでてきたら区分求積法

6.5 整数問題

- (1) 整数問題の主な解法は 3 つ ⇒ 整数の性質, 式の変形 (因数分解), 不等式
- (2) 1, 2, 3 で考える
- (3) 大数は素因数分解
- (4) 規則性は倍数・約数・余りで考えろ
- (5) 不等式をつかえ

- (6) 公倍数の個数はベン図.
- (7) ガウス記号は不等式
- (8) 奇数, 偶数で考える.
- (9) 余りで場合分けする. (余りで *sort*)
- (10) 3 で割って, 割りきれない・割り切れないは, $3n, 3n + 1, 3n + 2$ よりも, $3n, 3n + 1, 3n - 1$.

6.6 数列・場合の数・論理・証明

- (1) 1, 2, 3 で考える.
- (2) 1, 2, 3 で確かめる.
- (3) わからなければ全部かけ
- (4) 数列はいざとなれば数学的帰納法
- (5) 難しい漸化式はば数学的帰納法
- (6) 場合分けは和
- (7) 同時性は積の法則
- (8) 条件付き確率は表・ベン図で, 内わる外.
- (9) 組合せ ${}_nC_r$ の大小は倍率. 最大最小も倍率.
 定数 n に対して, $\frac{{}_nC_{r+1}f(r+1)}{{}_nC_rf(r)} \geq 1$ を調べる.
- (10) 証明は主に 4 通り⇒演繹法・対偶・背理法・数学的帰納法 (他に転換法・鳩の巣論法・白黒論法などもある)
- (11) 矛盾について考えろ⇒背理法
- (12) 式の証明に絶対値や $\sqrt{\quad}$ があれば左辺と右辺の 2 乗の差を考える
- (13) 不等式の証明⇒差を考える (2 乗の差も), 相加相乗の平均, 微積分, 平均値の定理
- (14) 存在証明⇒背理法, 中間値の定理, 鳩の巣論法